

«Московский государственный технический университет имени Н.Э.  
Баумана (национальный исследовательский университет)»  
Факультет «Информатика и системы управления»  
Кафедра «Приборы и системы ориентации, стабилизации и  
навигации»

## **Лабораторный практикум в программном пакете компьютерной математики MAPLE**

учебно-методическое пособие /А.Н. Малахов, Н. Н. Фащевский  
Москва: 2021.

Учебно-методическое пособие содержит методические указания по выполнению заданий лабораторного практикума в программной среде MAPLE в рамках программы дисциплины учебного плана «Расчет и синтез приборов и систем на ЭВМ». Данный лабораторный практикум необходим для приобретения студентами умений и практических навыков при проектировании систем автоматизированного регулирования различного назначения.

Пособие предназначено для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана специальности 24.05.06, «Системы управления летательных аппаратов» кафедры «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации». Пособие может использоваться при выполнении курсового и дипломного проектирования.

УДК 629.7.05

ББК 39.52:39.57

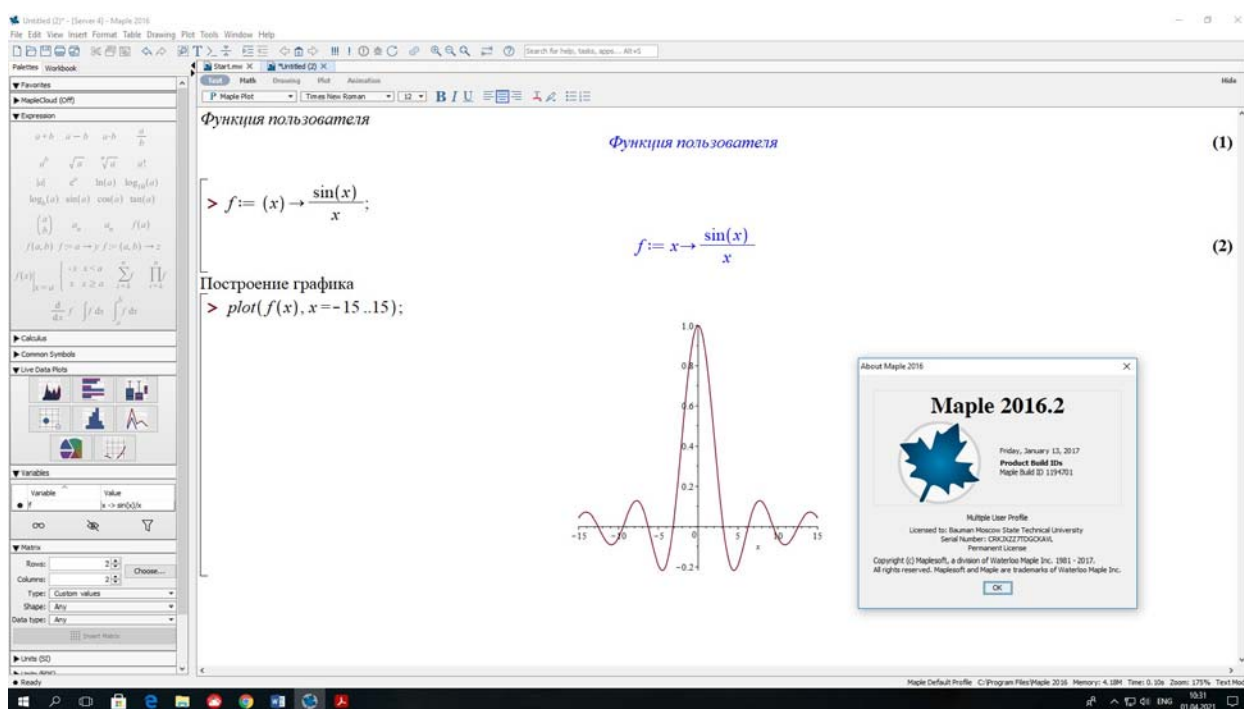
**Тема :** Пакет MAPLE для научных и инженерных расчетов.

**Цели работы :** Ознакомление с принципами использования программного пакета компьютерной математики для научных и инженерных расчетов MAPLE, выполнение расчетных работ с использованием специальных функций пакета для анализа и синтеза систем автоматического регулирования.

## Введение. О системе MAPLE.

1. Введение. Программное обеспечение **Maple** может использоваться для проведения численных и символьных вычислений, позволяет моделировать многокомпонентные технические системы и содержит инструменты для подготовки технической документации. **Maple** предлагает глубину, размах, точность и производительность вычислений для решения любых математических и инженерных задач, независимо от того, требуются ли элементарные проектные расчеты и алгоритмы или разработка комплексных моделей, логическое моделирование и обучение математике.

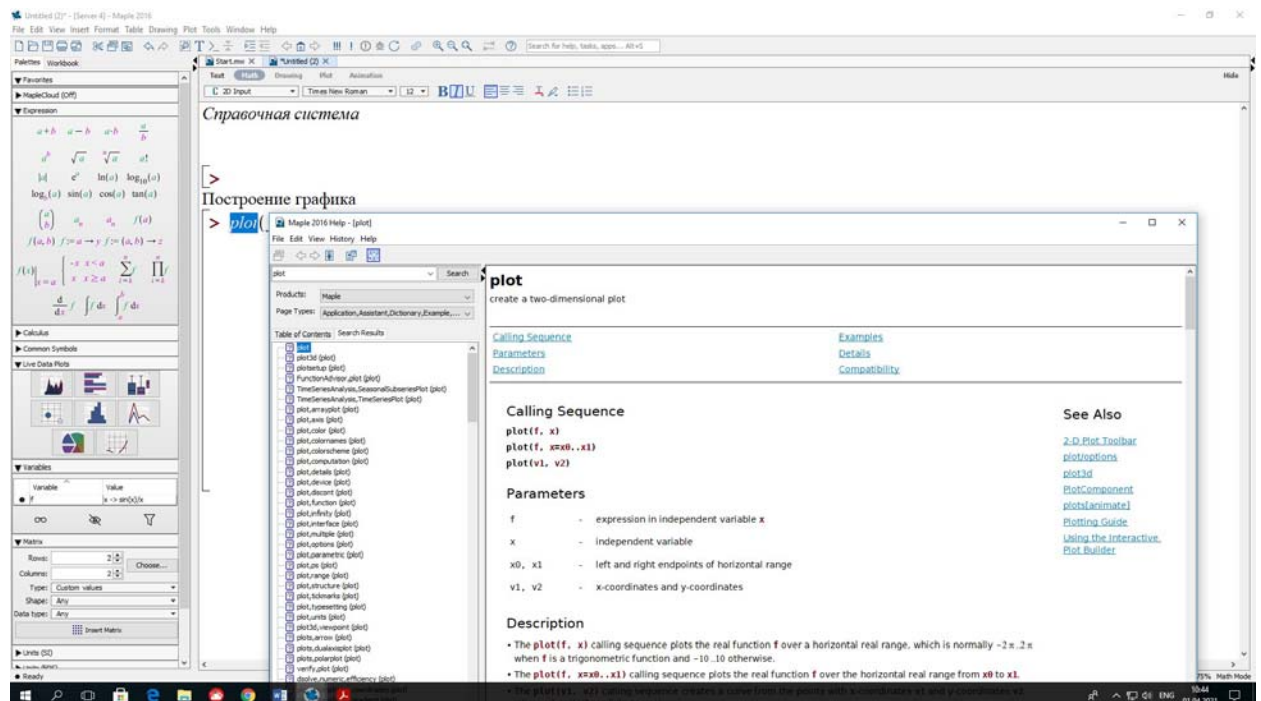
Интуитивный интерфейс Maple фиксирует все технические данные пользователя, содержит множество средств анализа, функцию редактирования уравнений, контекстные меню, палитры для быстрого начала работы. Продукт **Maple** является незаменимой системой компьютерной алгебры для инженеров, математиков и ученых. Пакет MAPLE является средой - интерпретатором команд, рабочее поле экрана используется для ввода математических выражений с последующей обработкой и ввода комментариев. В пакете MAPLE применяется также способ вычисления с использованием программ, написанных пользователем. Результаты работы системы при выполнении команд или программы выводятся на рабочее поле экрана и на графики.



Символ  $>$  указывает на начало исполняемой командной строки в режиме математической нотации. Документ Maple состоит из отдельных блоков (в оригинале - groups). Они выделяются слева длинными тонкими квадратными скобками. Есть еще один способ выделения ячеек — объединение их в секции (section), секция открывается и закрывается

кнопкой со стрелкой, управляющей ее состоянием: открытым или закрытым. Диалог идет в стиле: «задал вопрос, получил ответ». Вопросы и ответы занимают отдельные блоки, выделяемые в левой части квадратными скобками. Длина квадратных скобок зависит от размера выражений — исходных (вопроса) и результатов вычислений (ответов на вопросы). Знак фиксации конца выражения ; (точка с запятой) указывает, что результат его вычисления должен быть выведен на экран, а знак : (двоеточие) отменяет вывод и может использоваться как знак разделителя при записи нескольких выражений в одной строке, :: (двойное двоеточие) – присвоение типа (например real). Символ := означают присвоение значения, а символ = подразумевает логическое равенство, .. (две точки последовательно) между двумя числами - интервал.

2. В меню **Help** справочной системы Maple сосредоточены средства доступа к справке по всем функциям системы. Справочной системе Maple принадлежит исключительная роль — только в ней можно найти полную информацию обо всех функциях Maple. В справочной системе имеются все присущие современным базам данных возможности для быстрого поиска нужной информации и даже для ее структурирования и пополнения. Справку по любой встроенной функции можно получить, просто установив на ее имени маркер ввода и нажав клавишу **F1** или задать команду: `> ? имя функции`. Примеры из справочной системы можно использовать, для этого их нужно скопировать в буфер и перенести в окно документа Maple и модифицировать для своих целей. Основные команды по работе со справочной системой Maple сосредоточены в меню **Help**.



3. Математические выражения. Как и большинство систем программирования Maple обеспечивает выполнение математических

выражений, но в отличие от других пакетов существует возможность работы с выражениями в символьном – общем виде. В состав математических выражений входят: переменные; числа; операторы; функции.

**4. Переменная и числа.** Имена переменных, констант и функций могут быть составлены из любых символов латинского алфавита, кроме специальных и цифр, начинаются с буквы. Для идентификации переменной используются первые 31 символ имени. Система различает верхний и нижний регистр букв в именах переменных и функций и оперирует с целыми, рациональными, действительными и комплексными числами. Запись действительных чисел выполняется: в десятичной форме или в показательной, показатель степени отделен от мантииссы символом **E** без пробела. Числовая константа  $\pi$  записывается как **Pi** (при расчетах лучше использовать число 3.14 ...). У целых не ставят десятичную точку, знак плюс для положительных не обязателен! Комплексное число представлено действительной и мнимой частями, мнимая часть умножается на квадратный корень из -1 - символ **I** (большое *i*).

**5. Функции.** Ядро Maple имеет большое количество встроенных стандартных математических функций – **sin, exp, sqrt, abs, Diff, solve** и др. Задание отрицательного аргумента для **log, sqrt** не приводит к ошибке, а автоматически вычисляется соответствующий результат в виде комплексного числа. Весьма необходимыми являются функции оценки и преобразования выражений, необходимые, в случае если пакет выдал результат не в том виде, который бы вы хотели: **simplify(expr)** , **convert(expr, <вид>)**; и группа функций **eval...(expr)** . Свойства функций, форматы их использования и близкие функции имеет смысл перед использованием посмотреть меню **Help**.

В системе Maple также реализованы алгоритмы счета более сложных и специальных функций находящихся не в ядре, а подгружаемых библиотеках (пакетах), которые вызываются командой **> with(имя пакета)** . Полный список пакетов можно получить, используя команду: **> ?packages** . С помощью команды: **> ? имя пакета\_package** ; можно получить информацию о любом пакете расширения и найти список входящих в него функций.

**6. Основы программирования.** Более гибкий способ задания полноценных функций пользователя базируется на применении функционального оператора. При этом используется следующие конструкции:

**> name:=(var1, var2, ...)->expr** или **> name:=unapply(expr, var1, var2, ...)** . После этого вызов функции осуществляется в виде: **> name(x.y,...)**, где (x.y,...) — список формальных параметров функции пользователя с именем name. Элементы программирования, возможно, использовать прямо в процессе общения с пакетом:

```
> V:=array(1..10, [ ]); # Объявление одномерного массива
> for i from 1 by 1 to 10 do V[i]:=i end do; # Присвоение элементам
индексов .
```

Часто используемые группы вычислений удобно записывать в виде процедур, общая форма записи которой, выглядит следующим образом:

```
> name:=proc(<argseq>) # объявление процедуры
```

```

local<nseq>; # объявление локальных переменных
global<nseq>; # объявление глобальных переменных
options<nseq>; # объявление расширяющих ключей
description<stringseq>; # объявление комментариев
<stateq> # выражения - тело процедуры
end; (или end:) # объявление конца процедуры

```

### 1. Практическое ознакомление с работой в пакете Maple.

1. Изучить в Maple использование встроенной справочной службы **HELP**, включая **Topic Search**, при необходимости обращаться к ней и к примерам.

2. При выполнении этой части, в качестве исходных данных использовать функцию  $f(x)$  и отрезок области определения функции  $[..., ...]$ , на котором она задана, согласно варианту .

3. Выполнить ряд операций с заданным отрезком (каждое действие сопровождать комментариями!):

- сложить и перемножить, получить разность и частное верхнего и нижнего пределов отрезка;

- для последнего результата рассчитать **sin**, **arctan**, **ln** квадратный корень (**sqr**t) и определить знак (**signum**)

- считая верхний предел отрезка действительной частью, нижний мнимой комплексного числа записать его, с помощью встроенных функций определить действительную и мнимую части, модуль и комплексно сопряженное число и аргумент ( **Re** , **Im** , **abs** , **argument** , **conjugate** ) .

4. Для заданной согласно варианту функции :

- определить функцию, как функцию пользователя ( **->** ), рассчитать ее значения на верхней и нижней границах отрезка;

- построить график функции (**plot**) на заданном;

- приравняв функцию «0», решить уравнение относительно  $x$  (**solve**) ;

- создать 2 одномерных массива (**array**), **X** и **Y** из 9 элементов каждый: элементы **X[i]** – равномерно распределены на заданном интервале, а элементы **Y[i]** значения заданной функции в точках **X[i]**, для задания элементов векторов использовать оператор цикла;

- аппроксимировать функцию заданную векторами **X[i]** и **Y[i]** (**interp**), построить график аппроксимированного образа;

- разложить исходную функцию в ряд Тейлора (**series**), отбросить остаточный член ряда, построить графики ряда как образа исходной функции;

- записать и определить производную (**Diff**, **diff**) и рассчитать определенный интеграл (**Int**, **int**).

5. Вызвать дополнительную библиотеку функций линейной алгебры (пакет **linalg**)

- сформировать три вектора (одномерных массива) как столбцы (**[column]**), из элементов массива **Y[i]**

- создать матрицу **M**, 3x3 из этих векторов и рассчитать ее определитель (**det** – из пакета **linalg**);

## 2. Анализ динамической системы с использованием функций MAPLE.

1. Модель движения динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений записанных в операторной форме Лапласа. В ней:  $a_i$  и  $b_i$  численные коэффициенты;  $\omega_X, \omega_Y, \beta, \gamma, \psi$  - переменные состояния динамической системы, изменяющиеся во времени;  $\delta_H$  и  $\delta_\Delta$  воздействия на систему, могут вывести ее из положения равновесия.

$$\begin{array}{rcll} (s + b_1) \omega_X + a_6 \omega_Y + b_2 \beta & = & -a_5 \delta_H - b_3 \delta_\Delta \\ b_6 \omega_X + (s + a_1) \omega_Y + a_2 \beta & = & -a_3 \delta_H - b_5 \delta_\Delta \\ -b_7 \omega_X - \omega_Y + (s + a_4) \beta - b_4 \gamma & = & -a_7 \delta_H \\ -\omega_X & + & s \gamma & = 0 \\ & - & \omega_Y & + s \psi = 0 \end{array}$$

Вывести из системы уравнений передаточную функцию (ПФ) системы  $W(s)_{X/F}$ , согласно варианта. ПФ системы может быть определена, как отношение преобразования Лапласа  $X(s)$  величины  $x(t)$  на выходе системы к преобразованию Лапласа  $F(s)$  воздействия  $f(t)$  на ее входе при нулевых начальных условиях. Т.е. необходимо разрешивши эту систему относительно  $X(s)$  и  $F(s)$ . (при записи использовать маленькую “s” !)

Это возможно сделать, решая систему уравнений как СЛАУ например, методом Крамера – представив ее в матричном виде, а отношение определителя матрицы состояния в котором столбец, соответствующий параметру движения заменен на соответствующий столбец воздействий к определителю матрицы состояния) относительно параметра движения **X**, получается ПФ вида  $W(s)_{X/F} = \frac{d_m s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_0}{s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_0}$ , где  $m < n$ .

Есть смысл задавать **Matrix** как совокупность **Vector**ов коэффициентов при переменной состояния и при воздействиях.

2. По ПФ системы найти амплитудную  $L(\omega)$  и фазовую  $\Theta(\omega)$  частотные характеристики системы (**abs**, **log10**, **argument**, **abs**). Построить графики этих характеристик системы, отобразив частоту в логарифмических координатах (пакет **plots**).

Это возможно сделать, формальной заменой в ПФ аргумента  $s$  на  $I \cdot \omega$ , где  $I$  - мнимая единица,  $\omega$  - частота. При этом  $L(\omega) = 20 \cdot \lg |W(I \cdot \omega)|$ , а фазовая аргумент ПФ.

3. Сделать обратную замену в ПФ аргумента  $I \cdot \omega$  на оператор Лапласа  $s$ . Используя пакет **inttrans** перевести передаточную функцию во временную область и рассмотреть график полученной переходной функции системы во времени  $h(t)$ .

4 Алгоритмизировать получение передаточной функции из системы уравнений и составить для этого процедуру, проверить работу процедуры.

5 Используя пакет **DynamicSystems** для анализа динамических систем определить полученную ПФ как **TransferFunction** и с помощью функции **BodePlot** построить амплитудную и фазовую частотные характеристики системы, а так же переходную характеристику. Сравнить графики полученные в этом пункте и ранее.

### Заключение

На данных примерах рассмотрена лишь небольшая часть возможностей программного пакета компьютерной математики для научных и инженерных расчетов **Maple**.

### Варианты данных для части 1:

1.  $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 - 4$  , [-2.6 ; 5.7 ] ;
2.  $f(x) = x/4 - 4 \cdot e^x + 4$  , [-5.4 ; 2.1 ] ;
3.  $f(x) = \sqrt[3]{(10 \cdot x + 25)} - x - 4$  , [1.9 ; 19 ] ;
4.  $f(x) = e^x \cdot \sin(x) - 10$  , [-5.1 ; 3.1 ] ;
5.  $f(x) = 2 \cdot \cos(0.2 \cdot x + 4) - 1$  , [-5 ; 20.7 ] ;
6.  $f(x) = e^{x \cdot x + x + 1} - 5$  , [-1.4 ; 1.3 ] ;
7.  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 3} - 1$  , [ -1.9 ; 3.5 ] ;
8.  $f(x) = 1 / (1 + \frac{1 + x}{1 - x^2})$  , [-5.9 ; 1.5 ] ;
9.  $f(x) = (\arctg(x)) \cdot (x + 2) - 4$  , [-4.3 ; 6.2 ] ;
10.  $f(x) = \arcsin(0.5 \cdot x) - e^x + 2$  , [-1.9 ; 1.9 ] ;
11.  $f(x) = \ln(x + 10) \cdot 2.7 - 7.3$  , [-6.4 ; 22.4 ] ;
12.  $f(x) = -10^{-4} \cdot x^4 + 10^{-2} \cdot x^2 - 1$  , [-20.6 ; 20.6 ] ;
13.  $f(x) = \sqrt[3]{e^x + 8} - 5$  , [-5.2 ; 5.2 ] ;
14.  $f(x) = \frac{x^2 - \cos(x)}{x^2 + 20} - 1$  , [ -11 ; 11 ] ;
15.  $f(x) = 0.005 \cdot x^4 - 5 \cdot x + 8$  , [-5.6 ; 10.6 ] ;
16.  $f(x) = 1.5 \cdot \sin(4 / (0.8 \cdot x + 8)) + 1$  , [-9 ; 9 ] ;
17.  $f(x) = -\log_{10}(x + 2) - 0.3$  , [-1.4 ; 12.4 ] ;
18.  $f(x) = 1.5 \cdot \sin(\arccos(x - 1)) - 1$  , [ 0 ; 2 ] ;
19.  $f(x) = 3 - (e^{x-1}) / 500$  , [-7.5 ; 7.5 ] ;
20.  $f(x) = 5.2 \cdot \ln(4 / (0.8 \cdot x + 10)) + 5$  , [-1.4 ; 12.4 ] .

### Варианты данных для части 2:

Варианты передаточных функций :

№	1, 11	2, 12	3, 13	4, 14	5, 15
$W(s)_{x/\delta}$	$W(s)_{\omega x/\delta_3}$	$W(s)_{\omega y/\delta_3}$	$W(s)_{\gamma/\delta_3}$	$W(s)_{\psi/\delta_3}$	$W(s)_{\beta/\delta_3}$
№	6, 16	7, 17	8, 18	9, 19	10, 20
$W(s)_{x/\delta}$	$W(s)_{\omega x/\delta_H}$	$W(s)_{\omega y/\delta_H}$	$W(s)_{\gamma/\delta_H}$	$W(s)_{\psi/\delta_H}$	$W(s)_{\beta/\delta_H}$

Коэффициенты линейной модели  $a_i$

№	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
1	0.635	5.47	2.72	0.269	3.26	0.709	0.043
2	0.515	1.73	2.11	0.228	6.18	2.263	0.029
3	0.581	4.080	2.58	0.266	5.66	1.671	0.043
4	0.653	5.74	2.27	0.296	3.62	0.907	0.034
5	0.354	2.750	1.51	0.153	1.49	0.525	0.0254
6	0.283	0.425	1.020	0.119	3.33	1.308	0.0148
7	0.329	2.18	1.44	0.151	3.15	0.976	0.0254
8	0.259	-0.877	0.633	0.096	2.31	1.325	0.008
9	0.177	13.400	5.460	0.300	7.04	0.706	0.447
10	0.732	3.360	5.31	0.310	7.24	1.43	0.0447
11	1.640	40.00	7.56	0.620	7.36	0.985	0.0278
12	0.370	1.850	2.730	0.160	5.990	1.024	0.0254
13	0.405	6.410	2.88	0.159	3.500	0.443	0.0254
14	0.343	-1.390	2.67	0.156	6.60	1.352	0.0215
15	0.184	2.77	1.350	0.074	1.360	0.276	0.0121
16	0.159	-0.633	1.260	0.072	3.140	0.629	0.0103
17	0.395	7.920	2.480	0.146	2.230	0.302	0.011
18	0.383	4.85	2.48	0.162	1.840	0.502	0.0107
19	0.506	10.000	2.100	0.187	3.13	0.305	0.006
20	0.491	0.934	2.09	0.207	1.41	0.576	0.006



Коэффициенты линейной модели  $b_i$ 

№	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
1	3.100	20.20	17.60	0.0719	-0.518	0.0571	0.065
2	1.770	41.80	7.81	0.0663	0.146	-0.092	0.391
3	1.900	38.60	13.10	0.0696	-0.258	-0.094	0.259
4	3.000	20.30	17.63	0.0791	-0.500	0.0517	0.063
5	1.790	13.90	9.73	0.0759	-0.313	0.0035	0.126
6	1.05	21.50	4.09	0.0694	0.081	-0.044	0.423
7	1.07	20.60	7.35	0.0739	-0.145	-0.033	0.259
8	1.13	13.50	3.25	0.0663	0.104	-0.056	0.50
9	4.162	36.20	35.40	0.0332	-2.110	0.117	0.0262
10	3.73	72.2	25.10	0.0374	-1.540	-0.142	0.208
11	7.235	133.00	22.90	0.0191	-1.050	0.131	0.004
12	1.220	35.10	11.90	0.0396	-0.550	-3.061	0.259
13	2.200	20.20	19.20	0.041	-1.11	0.033	0.054
14	1.050	35.00	3.610	0.0385	0.147	-0.090	0.342
15	1.04	12.90	8.86	0.0413	-0.176	0.004	0.117
16	0.433	16.00	4.31	0.0381	0.0737	-0.033	0.342
17	1.770	30.80	9.84	0.022	-0.378	0.0372	0.034
18	1.843	34.50	10.20	0.0218	0.165	0.051	0.174
19	1.820	44.3	12.00	0.0141	-0.0306	-0.0422	0.021
20	1.90	58.90	0.014	0.014	-0.318	-0.0302	0.156

**Литература:**

1. М. Н. Кирсанов. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. М.: Физматлит, 2010.
2. В.П. Дьяконов. «Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах». М.: ДМК-Пресс, 2016.
3. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание. Киев.: Диалектика-Вильямс, 2007.
4. В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба "Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект" / Монография / Гродно: Гродненский Госуниверситет, 2011, 517 с.
5. Материалы математического образовательного сайта [www.old.exponenta.ru](http://www.old.exponenta.ru)
6. Материалы сайта производителя: [www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com)