

# Инерциальные навигационные системы

9.02.22

ЛЕКЦИЯ 1

Навигация - совокупность дисципл., посвящ. методам и средствам перемещ. подвиж. объектов во времени и пр-во по траект-ли, кот. обесп. решение их целевой задачи.

2 семестра  
экзамен  
лабораторы



• Задача навигации и управ. в ЛА как правило тесно связаны

Задачи навигации:

- коорд. объекта
- скорости движ.

в платф. инса  
реш. в осн. эти задачи

Задачи ориентации:

- опред. углов ориентации  $\psi, \nu, \delta$

GPS, ориентир, звезды, по карте местности,

метод счисл. пути → инерциальное счисление пути

Все методы счисл. пути закнот. в измерении вектора скорости/ускор. (основ). центра масс подвиж. объекта → интегрирование этой инфи. проекции на выбран. зад. с.к.

$$V = \int_0^t a dt$$

- ⊕: - автономность  
- надежность  
- помехозащищенность

$$X = \int_0^t \int_0^t a dt^2$$

- ⊖: - неубет. накопление погрешностей с течением времени.

$$\tilde{a} = a + \delta a \rightarrow \text{сигнал с оска}$$

↓  
погрешность

не знаем (нр системы, нр случайная)

$$V = \int_0^t (a + \delta a) dt = V + \int_0^t \delta a dt = V + \delta a \cdot t$$

случ. велич. - отлив. от запуска к запуску, но в запуске пост. характ.  $\delta$  или  $\delta$

$$\delta = \sqrt{D} - \text{средн. квадрат. отклон.}$$

Случ. процесс - отлив. от запуска к запуску и в одном запуске то же не постоят.

$$X = \int_0^t V dt = X + \delta a \cdot \frac{t^2}{2}$$

• В БИНСах с главн. недостатком мало что нр подмать.

Флафф. ИНСы - трехосн. гироскоп. с высокоотн. гироскопами  
аксами.

## Основное уравнение инерциальной навигации

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

→ гравитационный

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{акт}} + \vec{G}$$

↙ активного шмт → под их действ. тело напич движ.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{\text{акт}}}{m} + \frac{\vec{G}}{m}$$

$$\vec{w} = \vec{a} + \vec{g}^r$$

абс. ускор.

$$\vec{a} = \vec{w} - \vec{g}^r$$

основное уравн. инерциал. навигации  
в инерт. с.к.

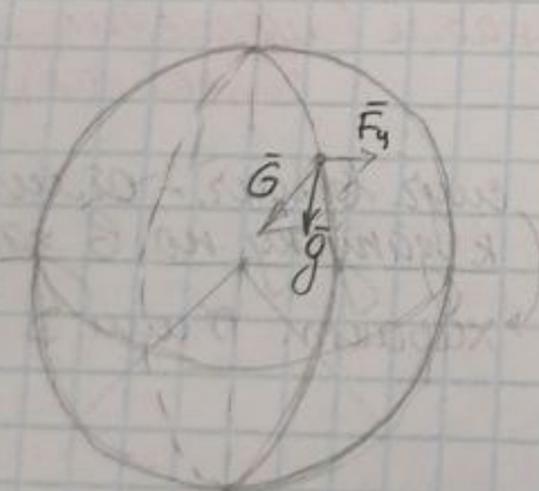
абы мерят кажущ. ускор.

$a$  - кажущееся ускор. - ускор. на шмта бы мат. точка, если бы движ. вне поля сил тяжести

## Форма Земли. Координаты точек на земной поверхности.

Фор. фигурой Земли почитают пов-ть воды океана кот. запичн. каналы, прорытые на суше.

Форма Земли обусл. суммар. действ. гравитацион. и центробеж. силы, обусл. вращением Земли.



Форму Земли наз-ют уровенной пов-тью силы тяжести ⇒ сложна, мат. отис. не имеет, к ней примен. термин геоид

Аппроксимируют геоид группой пов-телей

С достат. степенью точности геоид мб аппрокс. пов-тью, образ. вращ. эллипса вх его малой осн, совпад. с осью вращ. Земли - Эллипсоид Клеро.

### Эллипсоид Красовского

	Красовский	Бессель
$a$	6378245 м	6366397 м
$b$	6356856 м	6356079 м
$\alpha = \frac{a-b}{a}$	$\frac{1}{298,3}$	$\frac{1}{299,15}$
$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$	0,006692	

### Хайфорд

$$a = 6378328 \text{ м}, b = 6356909 \text{ м}$$

$$\alpha = \frac{1}{297}$$

② Сфера

Радиус подбирают либо для сферы одной площади пов-ти с эллипс. вращ., либо одного объема.

а) Один. площадь пов-ти  
 $R = 6371115 \text{ м}$

б) Один. объем  
 $R = 6371110 \text{ м}$

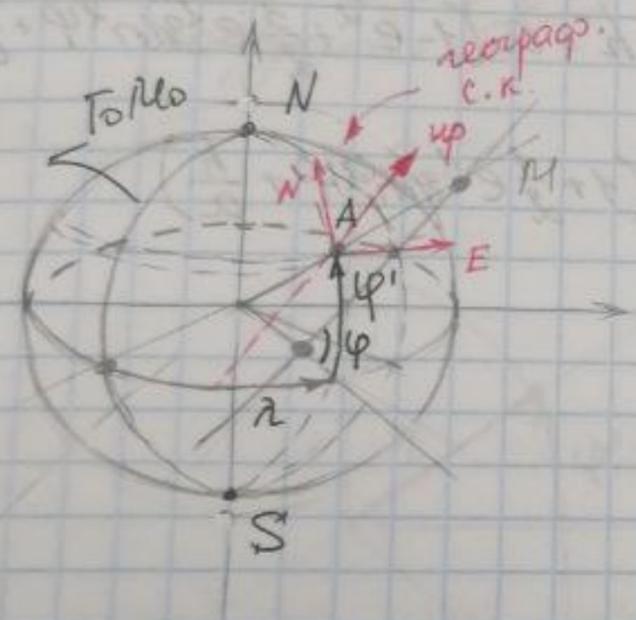
$R_0 = 6371 \text{ км.}$

③ Плоскость

В пределах полета на 300 км.

Координаты точек на поверхности  
 Земного сфероида.

ЛЕКЦИЯ 2



Точки пересеч. малой оси с эллипс. вращ. носят название полюсов.

Плоскость, проходящая через центр эллипс. вращ. и  $\perp$  мал. оси, пересек. пов-ть эллипсоида вращ. по линии, кот. носит назв. линии экватора. (пл-ти)

Плоскости  $\parallel$  линии экватора  $\perp$  пов-ти эллипс. вращ. по линиям, кот. наз-ся параллели.

Полюс, с точки кот. Земли вращ.  $\rightarrow$  с.с.в., наз-ся северным.

Линия эллипс. вращ. полюса, носит назв. меридианов

Параллели и меридианы образ. на пов-ти эллипс. вращ. коорд. сетку.

Геоц. точки на пов-ти эллипсоида вращ. опред. 2-мя коорд.: долготой и широтой.

Долгота отсчит. по линии экватора от нулевого (гринвич.) меридиана от  $0$  до  $180^\circ$  в запад и восточн. направл., либо от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  в восточном направл. ( $\lambda$ )

Широта геоц. - угол мжу радиус-вращ. и его следом на пов-ти эллипс. вращ. ( $\varphi$ )

Географ. широта - угол мжу нормального к пов-ти

эллипс, вращ и по-прежнему экватора (e). Относит. от по-прежнему экватора стороны север полюса от 0° до +90° и южной стороны южного полюса от 0° до -90°.

Амплитуда широты - угол между линией и горизонтальной (до тех пор пока ось экватора не будет).

Главные нормальные сечения: (N и n) и (n и E)

Радиусы кривоизогон нормальных главных сечений

$$R_n = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + h \quad (N-n) \quad h - \text{высота над пов. моря Земли}$$

$$R_p = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + h \quad (E-n) \quad \begin{matrix} \varphi - \text{широта} \\ e - \text{квадрат первого эксцентриситета} \end{matrix}$$

Разложим все в биномиальную ряд Нюттона

$$R_n = R_0 + h = a(1 - e^2)^{-1/2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} + h = a \left( 1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right)$$

$$R_a = R_0 + h = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} + h = a \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{h}{a} \right)$$

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{a} \left( 1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right)$$

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right)$$

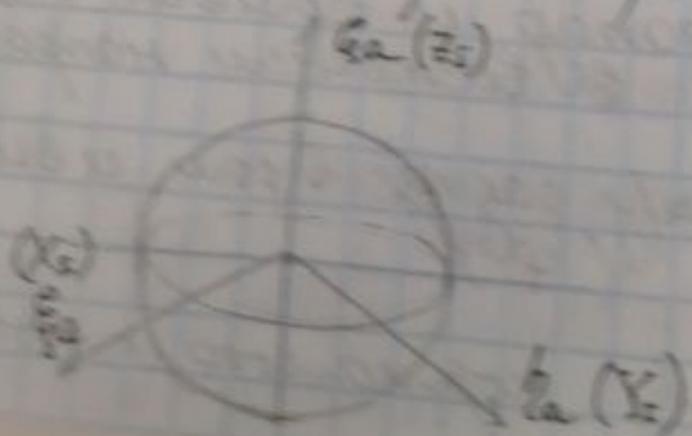
### Системы координат

#### 1) Интернациональная система координат

- Центр - в ц.м. солнечн. сист. (баричесентр)
- Оси направ. на удал. неподв. звезды.

- Сфера точно центр тяжести в центр эллипса. Оси из них совпад с мал. осью эллипса. а две другие лежат в пл-ти экватора, оси эллипса баричесентр. с.к. [бара осьюта]. Не примени. углы

не примени. законов механики



2) Земная система координат (геоцентрическая связанная с Землей с.к.)

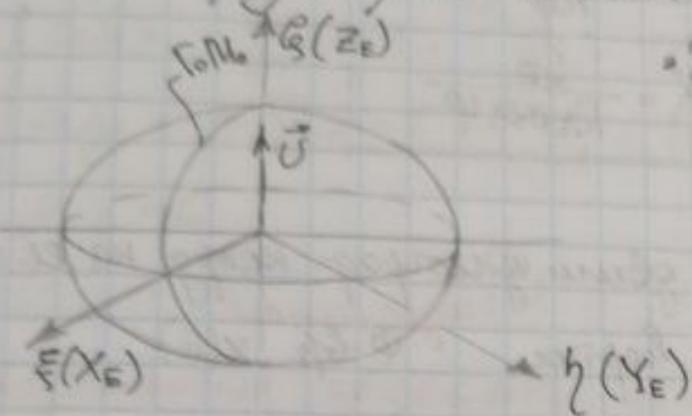
$\xi$  направ. по долг. оси эллипс. вращ.  $[Z_E]$

$\xi(X_E)$  и  $\eta(Y_E)$  лежат в пл-ти экватора

$\xi(X_E)$  направ. по линии пересеч. пл-ти экватора и пл-ти, содерж. нулев. (Гринв.) меридиан.

$\eta(Y_E)$  образ. прав. сист. коорд.

• Уравств. во вращ. Земли

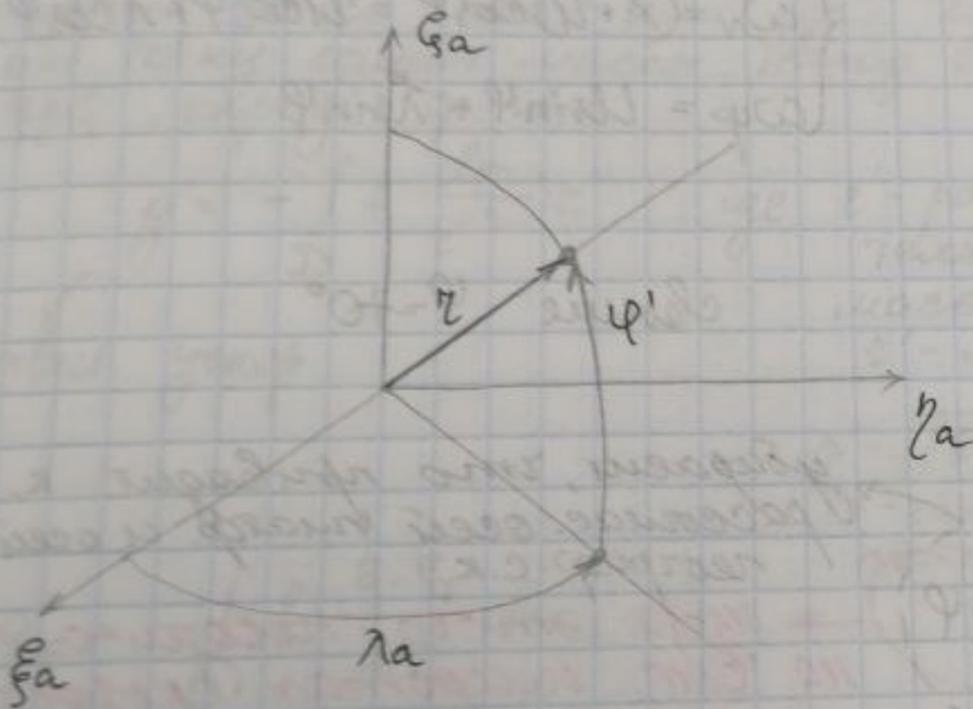


$$\dot{\eta}_{ас} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{3600} \cdot \frac{1}{24}$$

Анализ. вып-я для связи прямоуг. и кривалин. координат.

16.02.22.

Лекция 3



$\lambda_a$  - абс. долгота.

$$\dot{\lambda}_a = \dot{\lambda} + u$$

$$\begin{cases} \xi_a = z \cos \varphi' \cos \lambda_a \\ \eta_a = z \cos \varphi' \sin \lambda_a \\ \zeta_a = z \sin \varphi' \end{cases}$$

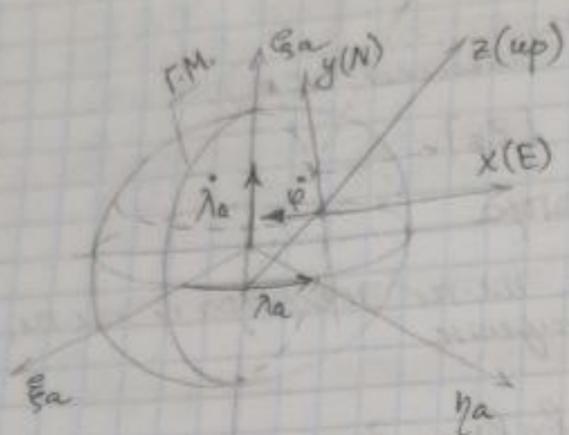
$$\begin{cases} \dot{\xi}_a = V \xi_a \\ \dot{\eta}_a = V \eta_a \\ \dot{\zeta}_a = V \zeta_a \end{cases}$$

3) Географическая система координат

Нач. коорд. наход. в ц.м. подвижного объекта

$z(\text{up})$  совпад. с нормалью к пов-ти эллипс. вращ., направ. вверх.

Две другие оси лежат в пл-ти мест. горизонта.



Одна из них направ. по кас. меридиану в сторону полюса -  $y(N)$

Третье направ. по кас. к параллели чтобы образ. прав. с.т.

$\Phi$ -от счислений:

$$\dot{\Phi} = \frac{V_N}{R_{\Phi}}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V_E}{R_{\lambda} \cos \Phi}$$

$V_E, V_N$  - проекции путей. ск-ти движи. ЛА на оси геогр. с.к.

Необх. опред. абс. угл. ск-ти движи. географ. коорд. на ее оси.

Повернем на  $\Phi$  и  $\lambda_0$ :  $\lambda_0$  в/з вертикали,  $\Phi$  в/з  $x(E)$

→ совмещение инерциальной и географ. с.к.

$$\begin{cases} \omega_x = -\dot{\Phi} \\ \omega_y = \dot{\lambda} \cos \Phi \\ \omega_z = \dot{\lambda} \sin \Phi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_E = -\dot{\Phi} \\ \omega_N = (\dot{\lambda} + \omega) \cos \Phi = V_E \cos \Phi + \dot{\lambda} \cos \Phi \\ \omega_{\Phi} = V_N \sin \Phi + \dot{\lambda} \sin \Phi \end{cases}$$

*управ. движ. на курсе широты*

$$\omega_E = -\frac{V_N}{R_{\Phi}}$$

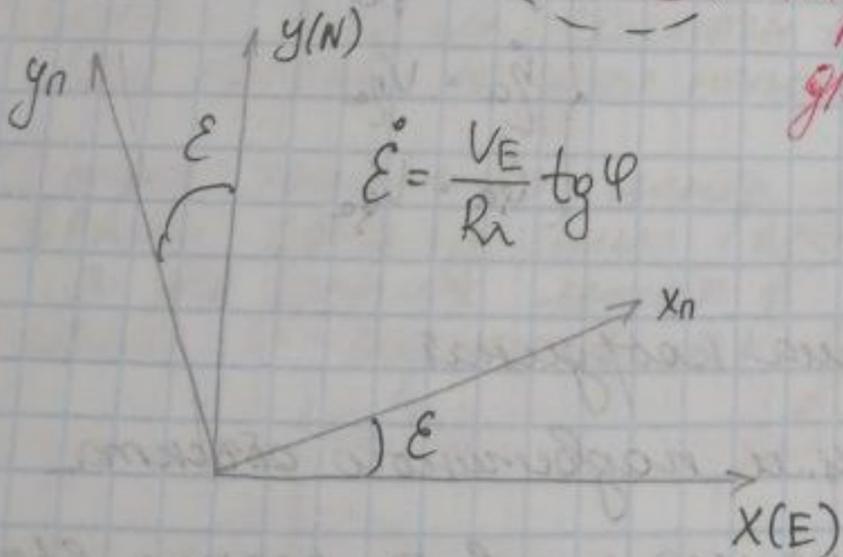
сведем  $\Phi = 70^\circ$

$$\omega_N = V_E \cos \Phi + \frac{V_E}{R_{\lambda}}$$

$$\omega_{\Phi} = V_N \sin \Phi + \left( \frac{V_E}{R_{\lambda}} \tan \Phi \right)$$

убираем, что приводит к расхождению осей маят. и осей географ. с.к.

→ из-за этого невозможна на выс. широтах коррект. маятниковы, т.к. управ. силой  $g/\theta \infty$



$\epsilon$  - азимут. угол.

С.к., в иер. не кепчене. азимут. состав ск-тью объекта *с.к.с*

везде пов-ти Земли, на все пов-ти свободн. в азимуте с.к.

Система поперечной в азимутальной с.к.:

$$\begin{cases} \omega_{xp} = -\frac{v_N}{R_{\text{ш}}} \cos \varepsilon + \left( \frac{v_E}{R_{\text{ш}}} + U \cos \varphi \right) \sin \varepsilon \\ \omega_{yp} = -\frac{v_N}{R_{\text{ш}}} \sin \varepsilon + \left( \frac{v_E}{R_{\text{ш}}} + U \cos \varphi \right) \cos \varepsilon \\ \omega_{zp} = U \sin \varphi \end{cases}$$

Азимутально свободная с.к.

$$\begin{cases} \omega_x = -\frac{v_N}{R_{\text{ш}}} \cos \varepsilon + \left( \frac{v_E}{R_{\text{ш}}} + U \cos \varphi \right) \sin \varepsilon \\ \omega_y = -\frac{v_N}{R_{\text{ш}}} \sin \varepsilon + \left( \frac{v_E}{R_{\text{ш}}} + U \cos \varphi \right) \cos \varepsilon \\ \omega_z = 0 \end{cases}$$

Определение гравитационного ускорения и ускорения силы тяжести в точке. Гравитационное поле и поле центробежной силы (П.В. Брошберт)

23.02.21

Т.к. мат. тело созд. гравит. поле в окрестности, пр-ве, то есть в р. напр-ии. Этого поля или ускор. сила, с кот. действ. поле на мат. точку единич. массы, наход. в точке М пр-ва с коорд.  $\xi, \eta, \zeta$ , опред. ф-лой:

$$g' = - \int_D f \frac{dm_1}{r'^3} r' \quad \text{где } r' \text{ - радиус-вектор из притяг. точки } M_1 \text{ тела с коорд. } \xi_1, \eta_1, \zeta_1 \text{ и эл-том массы } dm_1 \text{ в точку } M; r' \text{ - модуль в-ра, т.е.}$$

гравит. ускор.

$$r' = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2} \text{ - радиус-вектор.}$$

D - обл. интегр., совпад. с объемом притяг. тела

$$g'_\xi = - \int_D f \frac{\xi - \xi_1}{r'^3} dm_1$$

$$g'_\eta = - \int_D f \frac{\eta - \eta_1}{r'^3} dm_1$$

$$g'_\zeta = - \int_D f \frac{\zeta - \zeta_1}{r'^3} dm_1$$

проект.  $g'$  на оси  $\xi, \eta, \zeta$

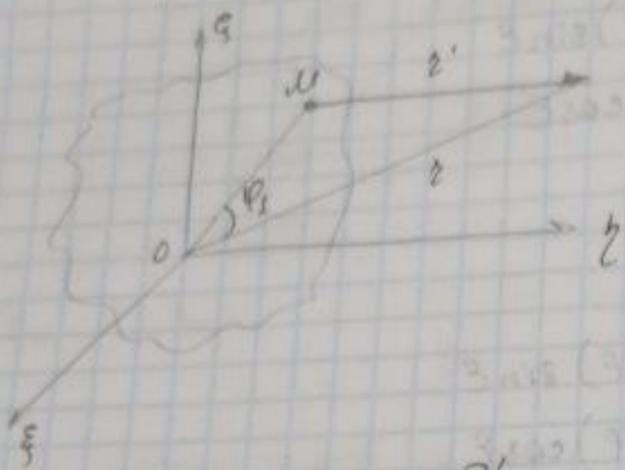
$$F' = mg' \quad \text{сила притяг., действ. на мат. точку массы } m$$

$F' \uparrow \uparrow g'$

Гравитационное поле эквив. потенциалу. Поле с силов. ф-ией:

$$\Pi' = \int_D f \frac{dm_1}{r'} \Rightarrow g'_s = - \frac{\partial \Pi'}{\partial s}$$

Сим ф-ию  $\Pi'$  найт гравиационном потенциалом.



По теор. косинусов

$$z'^2 = z^2 + z_1^2 - 2zz_1 \cos \psi_1$$

$$zz_1 \cos \psi_1 = \xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \zeta \zeta_1$$

$$z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2; z_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$$

После разном. в динамич. разг

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{z} \left[ 1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}{2z^2} + \frac{\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \zeta \zeta_1}{z^2} \right]$$

Подст. в инте.  $\Pi'$ , где  $\xi, \eta, \zeta$  - поот.

$\xi, \eta, \zeta$  - нап. осей с ц. м. осей совп. с осями инерции тогда стат. мом. и центробеж. мом. инерции = 0

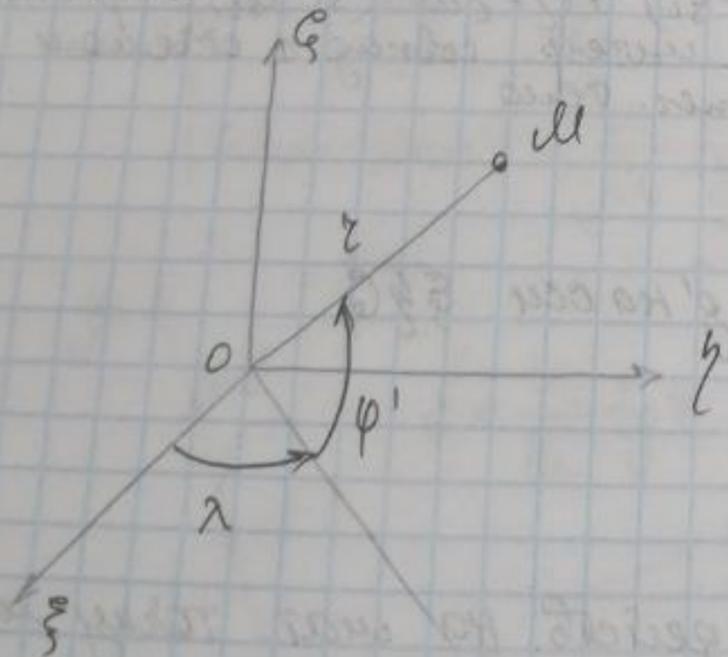
$A, B, C$  - мом. инерции, пригелев. тела относительно осей  $\xi, \eta, \zeta$

$$\int_D (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) dm_1 = \frac{1}{2} (A+B+C)$$

$$\begin{cases} \int_D \xi_1^2 dm_1 = \frac{1}{2} (C+B-A) \\ \int_D \eta_1^2 dm_1 = \frac{1}{2} (A+C-B) \\ \int_D \zeta_1^2 dm_1 = \frac{1}{2} (A+B-C) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Pi' = I \frac{m_1}{z} - I \frac{A+B+C}{4z^3} + I \frac{3}{4z^3} (C+B-A) + \eta^2 (A+C-B) + \zeta^2 (A+B-C),$$

где  $m_1$  - масса пригелеванного тела



Введ. две пригел. точки сферич. коорд.  $z, \psi', \lambda$

$$\xi = z \cos \psi' \cos \lambda$$

$$\eta = z \cos \psi' \sin \lambda$$

$$\zeta = z \sin \psi'$$

$$\Pi' = I \frac{m_1}{z} + \frac{I}{2z^3} \left[ \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \psi') + \frac{3}{2} (B-A) \cos^2 \psi' \cos 2\lambda \right],$$

полаг, что  $A=B$  и прав пометки. Замени:

$$\Pi' = \frac{K}{z} + \frac{M}{2} \frac{ka^2}{z^3} (1 - 3 \sin^2 \psi')$$

$$C-A = \mu m a^2$$

$$K = I m_1$$

$$C = \frac{2}{5} m_1 a^2$$

$$A = \frac{1}{5} m_1 a^2$$

$$C-A = \frac{1}{5} m_1 a^2$$

Обе  $\xi$   $\eta$   $\zeta$

$$\begin{cases} g'_z = \\ g'_{\psi'} = \end{cases}$$

$$g'_z =$$

$$+ \frac{8I}{z^4}$$

$$C - A = \mu m_1 a^2$$

$K = \int m_1$  - гравит. парр. притяг. тела  
 $M$  - распредел. масс внутри Земли

$$C = \frac{2}{5} m_1 a^2$$

$$A = \frac{1}{5} m_1 (a^2 + b^2)$$

$$C - A = \frac{1}{5} m_1 (a^2 - b^2) = \frac{1}{5} e^2 m_1 a^2 \approx \frac{2}{5} \Delta m_1 a^2$$

Ось  $\xi$  направ. так, чтобы Грин. Мер. окр. в м-ти  $\xi \xi \rightarrow \varphi'$  и  $\lambda$  будут лев. широтой и долготой точки  $M$ .

$$K = 398546 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}, \quad M = 0,00109$$

$$g'_z = \frac{\partial \Pi'}{\partial z} = -\frac{K}{z^2} \left[ 1 + \frac{3M}{2} \left( \frac{a}{z} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi') \right] \quad \text{- радиал.}$$

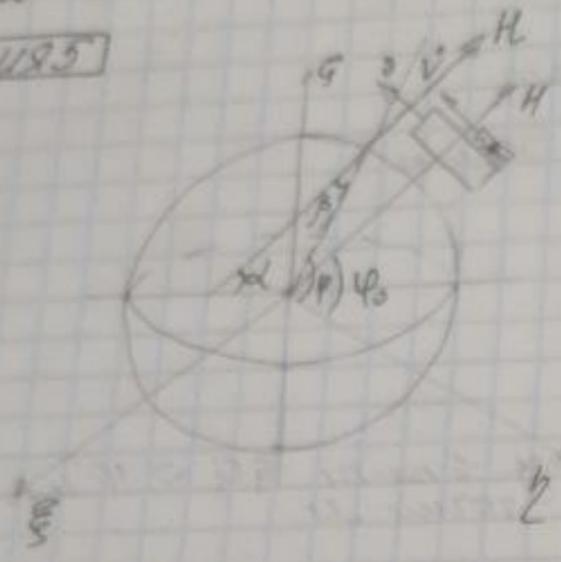
$$g'_{\varphi'} = \frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi'} = -\frac{K}{z^2} \cdot \frac{3M}{2} \left( \frac{a}{z} \right)^2 \sin 2\varphi' \quad \text{- трансверс.}$$

$$g' = \sqrt{g_z'^2 + g_{\varphi'}'^2} = \sqrt{\frac{K^2}{z^4} + \frac{3a^2 K^2 M}{z^6} + \frac{9a^4 K^2 M^2}{4z^8} - \frac{9a^2 K^2 M \sin^2 \varphi'}{z^6} - \frac{27a^4 K^2 M^2 \sin^2 \varphi'}{4z^8} + \frac{81a^4 K^2 M^2 \sin^4 \varphi'}{4z^8} + \frac{9a^4 K^2 M^2 \cos^2 \varphi' \sin^2 \varphi'}{z^6}}$$

- Лист посещения по практике
- Лист посещения по КП с 9-го сем.

20322

Лекция 8.5



- Земля по кругу
- Вспом. премах по дуге большого круга (отпогран)
- Тирекстен. износон. глени. с углов.  $H$  по нормали
- Ось гувств. ось-а совпад. с осью геогр. износон. - линия в тм-ти линия гориз.

$$\dot{\alpha} = \frac{M_{\text{изм}}}{H} = \frac{M_{\text{изм}}}{H}$$

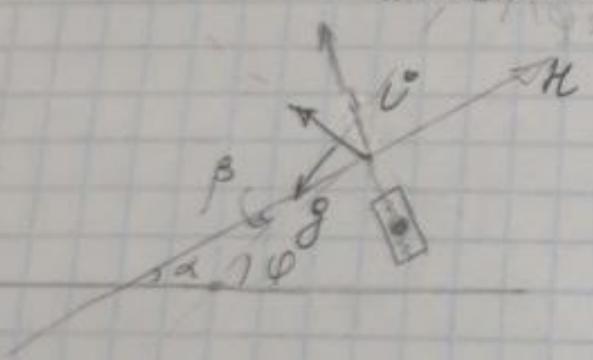
$$\dot{\varphi} = \frac{v}{R} \quad \text{— сн-то глени. испин. вертик. места.}$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\varphi} \Rightarrow M_{\text{изм}} = \frac{v}{R} \cdot H$$

$$M_{\text{изм}} = \frac{H}{R} \int_0^t \dot{v} dt, \quad K = \frac{H}{R} \quad \text{— услов. невозможн./уел. настрон. на первом шлупе}$$

$\alpha$  - авс. угел отклон. (межу  $H$  и н-тью экватора)

$\beta$  - относ. угел отклон. ( $H$  от испин. вертик.)



$$M_{\text{изм}} = K \int_0^t a dt = K \int_0^t (\dot{v} \cos \beta + g \sin \beta) dt =$$

$$= K \int_0^t (\dot{v} + g \beta) dt$$

$$\alpha = \varphi - \beta$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\varphi} - \dot{\beta}$$

$$\rightarrow \dot{\alpha} = \frac{K}{H} \int_0^t (\dot{v} + g \beta) dt$$

$$\dot{\varphi} - \dot{\beta} = \frac{K}{H} \int_0^t (\dot{v} + g \beta) dt$$

$$\dot{\beta} + \frac{K}{H} \int_0^t g \beta dt = \dot{\varphi} - \frac{K}{H} \int_0^t \dot{v} dt$$

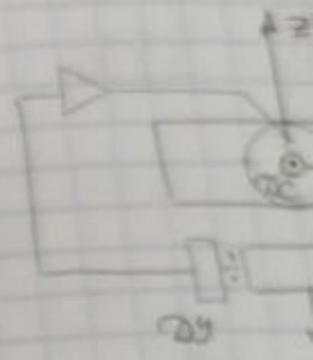
$$\ddot{\beta} + \frac{K}{H} g \beta = \ddot{\varphi} - \frac{K}{H} \dot{v} = \frac{\dot{v}}{R} - \frac{K}{H} \dot{v} = \dot{v} \left( \frac{1}{R} - \frac{K}{H} \right)$$

$$\ddot{\beta} + \frac{K}{H} g \beta = \dot{v} \left( \frac{1}{R} - \frac{K}{H} \right)$$

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{R} \beta = \dot{v} \left( \frac{1}{R} \right)$$

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{R} \beta = 0$$

- Система в...
- Система в...



• Настройка и шлупа в

~ оуел  
~ шл  
г  
• шл  
шл  
шл  
шл

1) шл  
2) шл

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{R}\beta = \dot{V}\left(\frac{1}{R} - \frac{k}{H}\right) \dot{R}$$

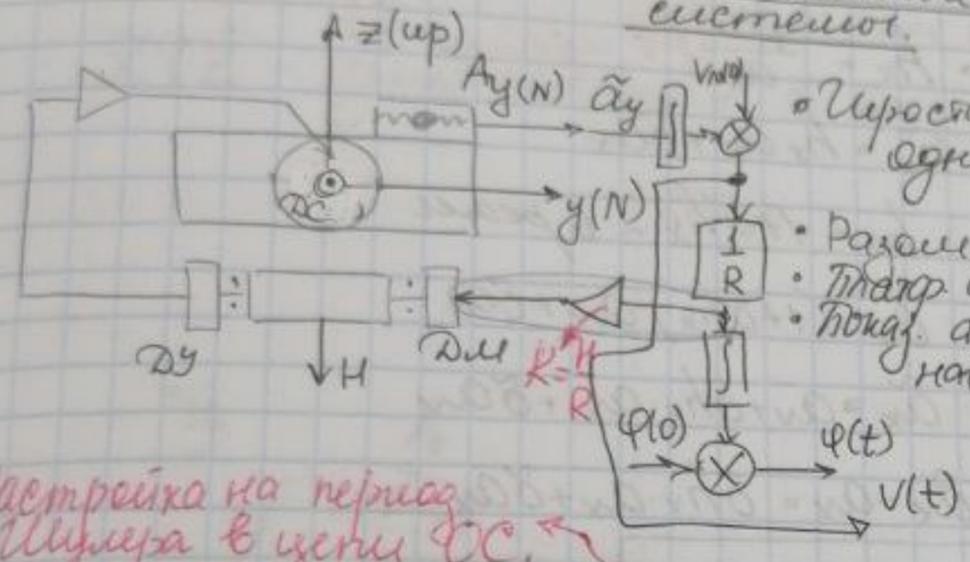
$$\ddot{\beta} + \dot{\gamma}^2 \beta = 0$$

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{R}} - \text{частота Шупера}$$

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = 84,4 \text{ мин.}$$

- Система влориз. п-ти невозмущ.
- Система нешто с Тш.

### Одноканальное инерциальное навигационное устройство.



- Широкоаб. платр стрехсет гирос-и ч однокан. осев. ос-ам.
- Разомин.
- Платр созд. е.к. базовую.
- Показ. акса неабх. для рел. задачи навигации.

• Настройка на период Шупера в цепи ОС.

Замкн. типа.

### Погрешности одноканальных ИНС

- Методические**
- ~ общ. принцип действ. сист.
  - ~ методы измер. те. те, кот. сущ. даже при идеал. изготовлении.
  - из-за того, что мы расем плоский малетик, т.е. пренебр. влиянием каналов друг на друга.
- Инструментальные**
- значения меноше, чем инструм.

### Инструментальные погрешности ИНС

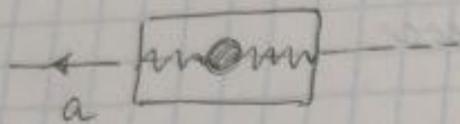
- 1) Погрешности ч.э.: акс-ов, шрос-ов
- 2) Погрешности нагалоной воствавки.

- Погрешности наг. выставки.
- Ошибки выкладки платформы (ее осей) к баз. с.к.

$$\beta(0) = \beta_0$$

### Погрешности акселерометров.

#### Одней оси



$$m a_x = K \Delta x$$

$$\tilde{a}_x = f(a_x) + \delta a_x$$

масс. коэф.  $\rightarrow h_x = \frac{f(a_x)}{a_x}$  (в идеале 1)

$$\tilde{a}_x = h_x a_x + \delta a_x$$

$$h_x = 1 + \delta h_x \text{ - в реальности}$$

$$\tilde{a}_x = (1 + \delta h_x) a_x + \delta a_x$$

$$\tilde{a}_x = a_x + \delta h_x \cdot a_x + \delta a_x$$

$$\Delta a_x = \tilde{a}_x - a_x = \delta h_x \cdot a_x + \delta a_x$$

$$\delta h_x \cdot a_x + \delta a_x = \delta a_x^?$$

- эквив. смещ. нуля акселерометра

иногда вместо  $h_x$   $\rightarrow$  отравлен резонанс

9.03.22.

### Погрешности гироскопов.

Лекция 6

$$\tilde{\omega} = h_g \cdot \omega$$

где  $\tilde{\omega}$  - измер. знач.

$h_g$  - масс. коэф.  
 $\omega$  - истин. / абс. знач.  
 $\tilde{\omega}$  - измер. знач.

$$h_g^* = 1 \text{ - номин. масс. коэф.}$$

- Для полн. мат. модели восп-ся способом вариации: вариацию ф-ии форми. по тем же правилам, что и дифференциале.
- Вариацией след. величин берут около их номин. знач.

мал. отклон. от номин. знач.

$$\delta \omega^? = \delta h_g \cdot \omega + h_g^* \cdot \delta \omega = \delta h_g \cdot \omega + \delta \omega$$

нестабильн.

масс. коэф.

$\rightarrow$  себе-са-го прецес.

$$\delta \omega^? = \delta h_g \cdot \omega + \delta \omega$$

$\rightarrow$  модель погреш. гирос-ов

Выходные погрешности

$$\Delta v_i = v - \tilde{v} \rightarrow \Delta v = \tilde{v} - v$$

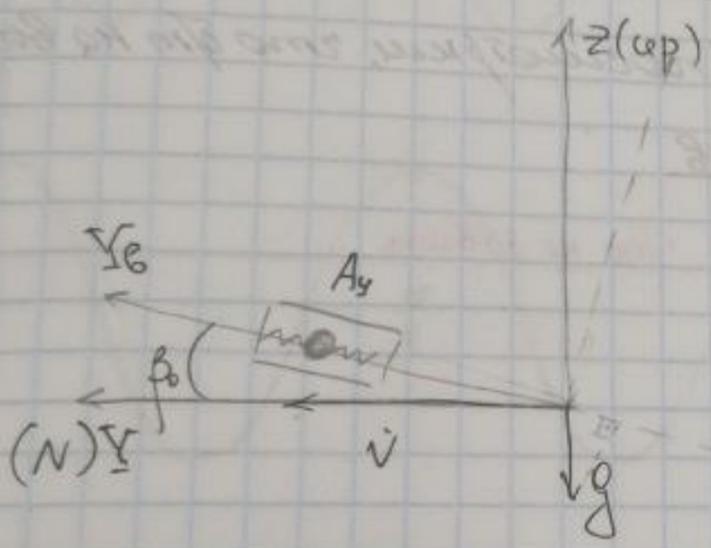
$$v = \tilde{v} + \Delta v$$

$$\Delta \varphi = \varphi - \tilde{\varphi} = \Delta \varphi \cdot \tilde{\varphi} - \varphi \quad \Delta y = \Delta \varphi \cdot R$$

$$\Delta \lambda = \lambda - \tilde{\lambda} \rightarrow \Delta \lambda = \tilde{\lambda} - \lambda \quad \Delta x = \Delta \lambda \cdot R \cdot \cos \varphi$$

Ошибки разомкнутой системы.

Баз. с.к. - географ. с.к.  
 XYZ - идеал. с.к. (в кот. измер. истин. знач.)  
 X<sub>0</sub> Y<sub>0</sub> Z<sub>0</sub> (X<sub>n</sub> Y<sub>n</sub> Z<sub>n</sub>) - связ. с осемь платф.  
 $\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Z}$  - измер./стремляе в воисис., расчётн. сист. коорд.



По оконч. нач. условиям XYZ и X<sub>0</sub> Y<sub>0</sub> Z<sub>0</sub> расеом. на угол beta

$$\beta(t) = \beta_0 + \delta \omega_x^z \cdot t \rightarrow \text{погр по углу фигуры}$$

$$\tilde{a}_y = a_y \cos \beta + g \sin \beta + \delta a_y^z$$

$$\Delta v_y = \tilde{v}_y - v_y = \int_0^t (\tilde{a}_y + g \beta + \delta a_y^z) dt - \int_0^t a_y dt = \int_0^t (g \beta + \delta a_y^z) dt \rightarrow$$

$$\tilde{v}_y = \int_0^t (g \beta_0 + g \delta \omega_x^z \cdot t + \delta a_y^z) dt = g \beta_0 t + \delta a_y^z t + g \cdot \frac{\delta \omega_x^z \cdot t^2}{2}$$

$$\Delta y = g \beta_0 \frac{t^2}{2} + \delta a_y^z \frac{t^2}{2} + g \frac{\delta \omega_x^z t^3}{6}$$

Дрейфам ширейлока опред. макс. на котн. погрешностей.  
 • Горизонт канала

Ошибки замкнутой системы.

$$\omega_{ин} = \omega_{упр} + \delta \omega^z$$

$$\dot{\lambda} = \dot{\varphi} - \dot{\beta} = \tilde{\varphi} + \delta \omega_x^z$$

$$\dot{\beta} = \underbrace{\dot{\varphi} - \tilde{\varphi}}_{\Delta \dot{\varphi}} - \delta \omega_x^z = \underbrace{\dot{\varphi}}_{\frac{v}{R}} - \frac{k}{H} \int_0^t (\dot{v} + g \beta + \delta a_y^z) dt - \delta \omega_x^z$$

$\tilde{\varphi}$  - идеал. уч. с.к. в м. кот  
 $\beta(t)$  - ошибка ориент.

$$\dot{\beta} + \frac{k}{H} \int_0^t g \beta dt = \frac{V \omega_x}{R} - \frac{k}{H} \int_0^t (\dot{V} + \delta a_{y^0}) dt - \delta \omega_x^0$$

$$\dot{\beta} + \frac{k}{H} \int_0^t g \beta dt = \frac{V \omega_x}{R} - \frac{k}{H} V - \frac{k}{H} \int_0^t \delta a_{y^0} dt - \delta \omega_x^0$$

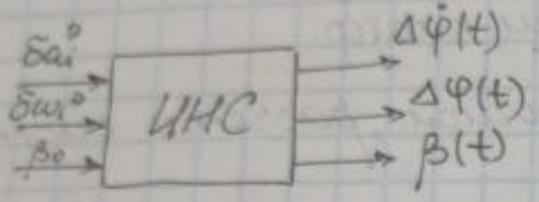
$$k = \frac{H}{R}$$

$$\boxed{\beta + \nu^2 \int_0^t \beta dt = -\frac{1}{R} \int_0^t \delta a_{y^0} dt - \delta \omega_x^0}$$

→ интегро-диф. ур-ие

Опис. повед. тех. переменных при уел. вх. ошибок от нач. возм. акс-ов, угловых скоростей

Лекция 7



• На Выход по одной пореш. → посмотрим, что бт на Вых.

Решаем для разных случаев

1. Акс-уг.; Тур-п-уг;  $\beta_0 \neq 0$  • Так не бывает

$$\beta + \nu^2 \int_0^t \beta dt = 0$$

$$\ddot{\beta} + \nu^2 \beta = 0$$

$$\beta(0) = \beta_0; \dot{\beta}(0) = 0$$

$$\beta(t) = A \cos \nu t + B \sin \nu t$$

$$\beta(0) = A = \beta_0$$

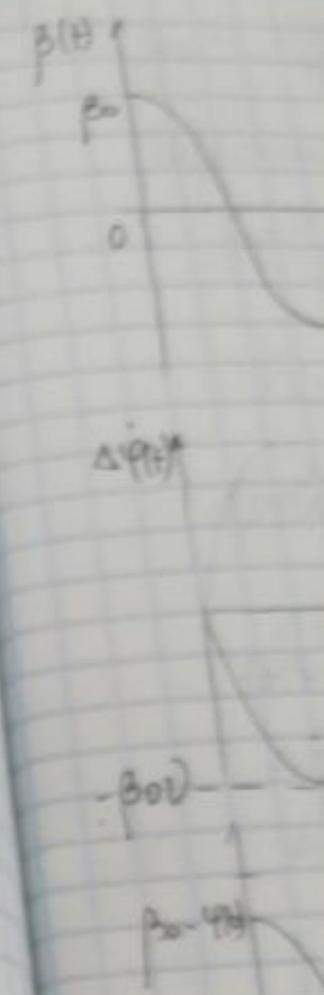
$$\dot{\beta}(t) = -A \nu \sin \nu t + B \nu \cos \nu t$$

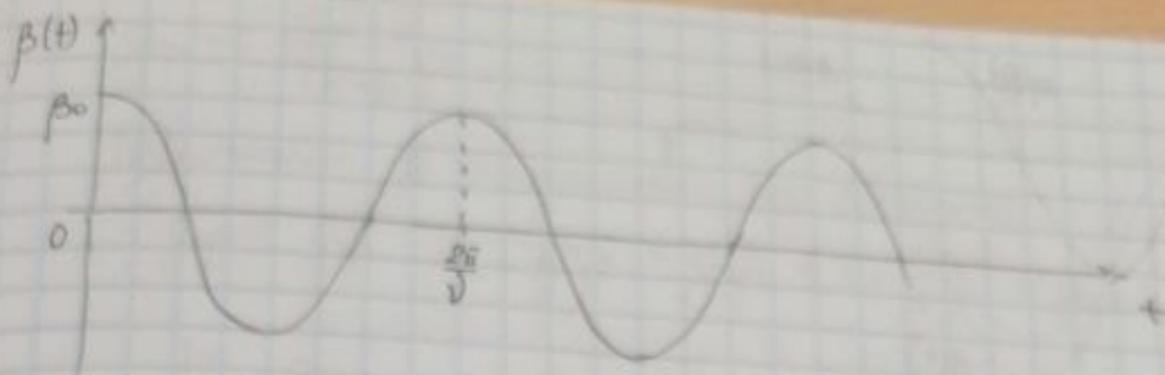
$$\dot{\beta}(0) = B \cdot \nu = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\beta(t) = \beta_0 \cos \nu t$$

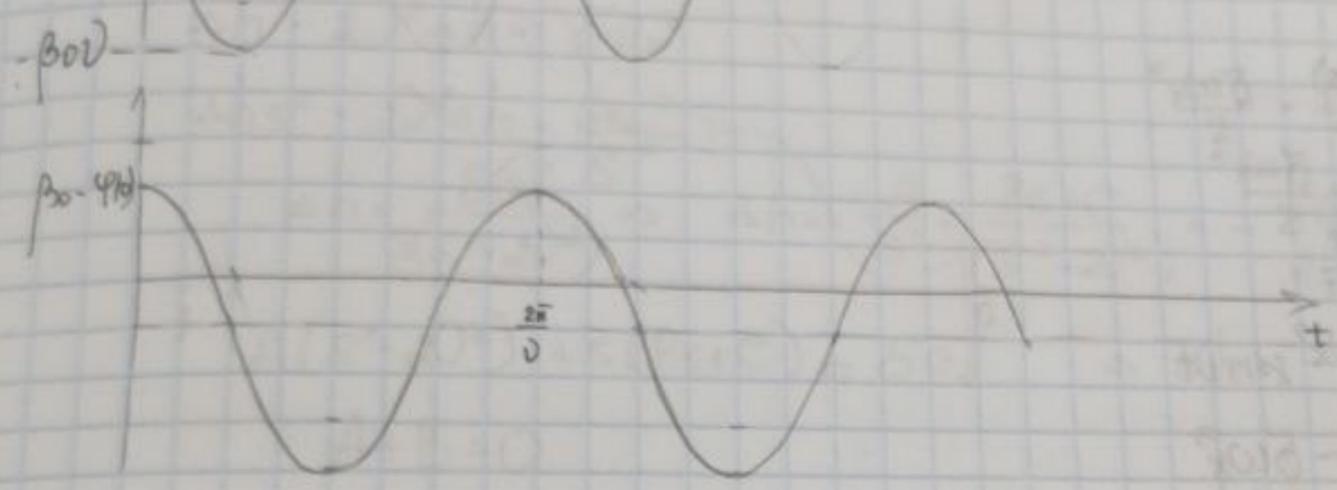
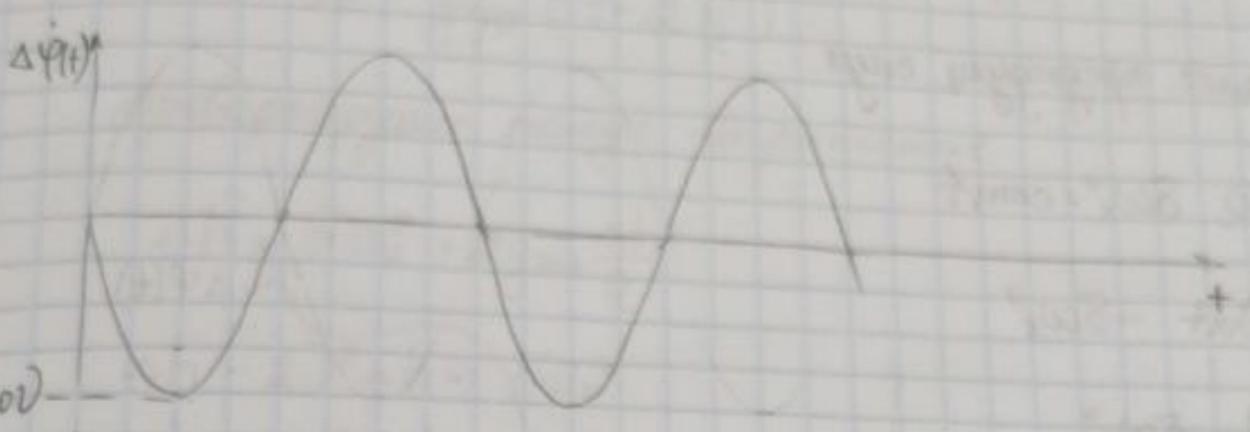
$$\dot{\beta} = \Delta \dot{\psi} - \delta \omega_x^0 \Rightarrow \Delta \dot{\psi} = \dot{\beta}(t) = -\beta_0 \nu \sin \nu t$$

$$\Delta \psi(t) = \beta_0 \cos \nu t + \psi(0)$$





• Вых. ошибка  
спустя время  $\rightarrow$  со  
временем не  
возр.



• Степенью времени ошибки не нарастают!

2.  $\delta a_y^3 \neq 0; \delta \omega_x^3 = 0; \beta(0) = 0$

$$\ddot{\beta} + \nu^2 \int_0^t \beta(t) dt + \frac{1}{R} \int_0^t \delta a_y^3 dt = 0.$$

$$\ddot{\beta} + \nu^2 \int_0^t \left( \beta(t) + \frac{\delta a_y^3}{g} \right) dt = 0.$$

$$z(t) = \beta(t) + \frac{\delta a_y^3}{g}$$

$$\dot{z}(t) = \dot{\beta}(t)$$

$$\dot{z}(t) + \nu^2 \int_0^t z(t) dt = 0.$$

$$\ddot{z} + \nu^2 z(t) = 0.$$

$$\begin{cases} z(0) = \frac{\delta a_y^3}{g} \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$$

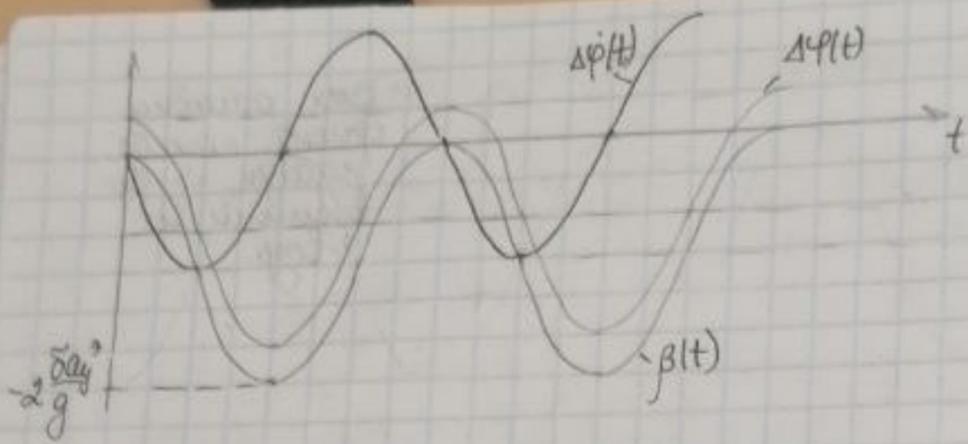
$$z(0) = 0$$

$$z(t) = \frac{\delta a_y^3}{g} \cos \nu t$$

$$\beta(t) = -\frac{\delta a_y^3}{g} (1 - \cos \nu t)$$

$$\dot{\beta}(t) = \Delta \dot{\psi}(t) = -\frac{\delta a_y^3 \nu}{g} \sin \nu t$$

$$\Delta \psi(t) = -\frac{\delta a_y^3}{g} (1 - \cos \nu t) + \psi(0)$$



• Вывод аналог. предыдущ. сущ.

3.  $\delta a_y^3 = 0$ ;  $\beta(0) = 0$ ;  $\delta \omega_x^3 = \text{const}$

$$\dot{\beta} = -\nu^2 \int_0^t \beta(t) dt - \delta \omega_x^3$$

$$s\beta(s) = -\nu^2 \frac{\beta(s)}{s} - \frac{\delta \omega_x^3}{s}$$

$$\beta(s) \left( \frac{s^2 + \nu^2}{s} \right) = -\frac{\delta \omega_x^3}{s}$$

$$\beta(s) = \frac{-\delta \omega_x^3}{s^2 + \nu^2}$$

$$\beta(t) = -\frac{\delta \omega_x^3}{\nu} \sin \nu t$$

$$\dot{\beta}(t) = \Delta \dot{\varphi}(t) - \delta \omega_x^3$$

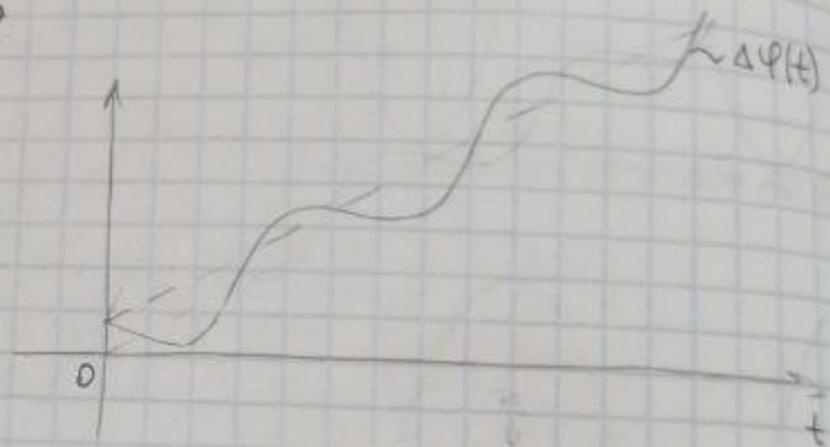
$$\beta(t) = -\delta \omega_x^3 \cos \nu t$$

$$\Delta \dot{\varphi}(t) = \delta \omega_x^3 (1 - \cos \nu t)$$

$$\Delta \varphi(t) = \delta \omega_x^3 \cdot t - \frac{\delta \omega_x^3}{\nu} \sin \nu t + \varphi(0)$$

$$\Delta \varphi(t) = \delta \omega_x^3 \left( t - \frac{1}{\nu} \sin \nu t \right) + \varphi(0)$$

• Ошибка по  $\beta(t)$  - незнач. косо, ошибка по  $\Delta \dot{\varphi}(t)$  - незнач. косо, ошибка по коорд.  $\delta t$  нарастает  $\sim$  первой степени от  $t$ . ( $\sim \delta \omega_x^3 \cdot t$ )



16.03.22.

Лекция 8

Погрешности вертикального канала.



$$\tilde{a}_z = W + g_{гр} \rightarrow \text{в идеал. случае}$$

$$W = \ddot{h}$$

$$\ddot{h} = \tilde{a}_z - g_{гр}$$

$$g_{TP} = \frac{g_{TP}^0 \cdot R^2}{(R+h)^2}$$

Разложим в биномиальн. ряд Ньютона

$$g_{TP} \approx g_{TP}^0 \cdot \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} = g_{TP}^0 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx g_{TP}^0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right)$$

$$\ddot{h} = \ddot{a}_z - g_{TP}^0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right)$$

Проверим поур. возвращение

$$\Delta \ddot{h} = \delta a_z^{\vec{z}} + 2g_{TP}^0 \frac{\Delta h}{R}$$

$$\Delta \ddot{h} - 2\nu^2 \Delta h = \delta a_z^{\vec{z}}$$

$$\Delta h s^2 - 2\nu^2 \Delta h = \delta a_z^{\vec{z}}$$

$$\Delta h = \frac{\delta a_z^{\vec{z}} s}{s(s^2 - 2\nu^2)} \Rightarrow \Delta h = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2 - 2\nu^2)} = -\frac{\delta a_z^{\vec{z}}}{2\nu^2 s} + \frac{\delta a_z^{\vec{z}} s}{2\nu^2 (s^2 - 2\nu^2)} \Rightarrow$$

$$A(s^2 - 2\nu^2) + s(Bs+C) = \delta a_z^{\vec{z}} \Rightarrow \Delta h =$$

$$A+B=0$$

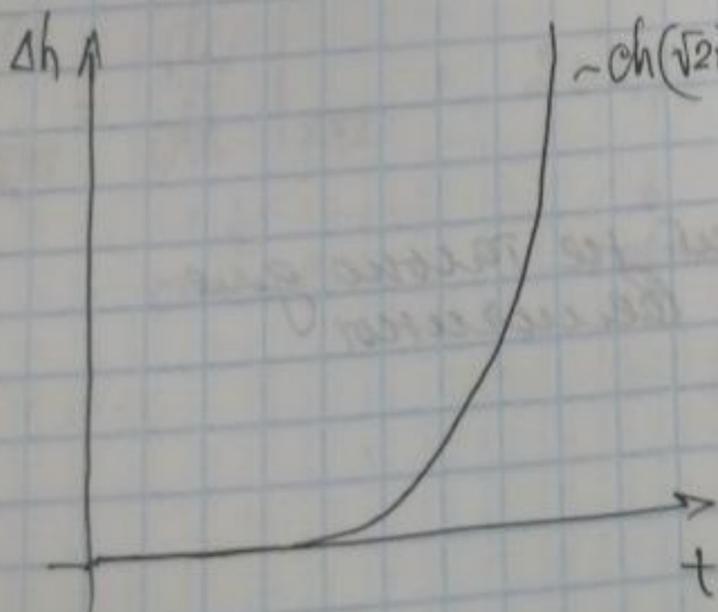
$$Cs=0$$

$$-A \cdot 2\nu^2 = \delta a_z^{\vec{z}} \Rightarrow A = -\frac{\delta a_z^{\vec{z}}}{2\nu^2}$$

$$B = \frac{\delta a_z^{\vec{z}}}{2\nu^2}$$

$$\Delta h = \frac{\delta a_z^{\vec{z}} s}{s^2 (s^2 + 2\nu^2)} = \delta a_z^{\vec{z}} \operatorname{ch}(\sqrt{2}\nu t)t$$

- Высота инерц. способом не измер. в силу неуст. канала высоток, т.к. через коротк. время прелом. резкий рост порешности.



• Используют баровысотомер, радиовысотомер

→ в план. сет-х

Ускорение и его представление в различных системах координат

Основное уравнение ИИ:

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

Формула Бура: переход от инерц. с.к. к неинерц.

$$\left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_m + \bar{\omega}_m \times \bar{r} \quad (1)$$

*inertial*      *non-inertial*

$$\bar{V} = \bar{V}_m + \bar{\omega}_m \times \bar{r}$$

$$\bar{\omega}_m \times \bar{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_{mi} & \omega_{mj} & \omega_{mk} \\ r_i & r_j & r_k \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_i & V_j & V_k \\ U_i & U_j & U_k \\ 0 & -\omega_k & \omega_j \\ \omega_k & 0 & -\omega_j \\ -\omega_j & \omega_i & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{vmatrix}$$

*↘ косоугол.  
матр. перех. абс. уш.  
с.к. к с.к.*

$$\begin{cases} V_i = U_i + \omega_j r_k - \omega_k r_j \\ V_j = U_j + \omega_k r_i - \omega_i r_k \\ V_k = U_k + \omega_i r_j - \omega_j r_i \end{cases}$$

Ф-ла Бура (Коренлиса) (1) явл-ся общей не только для радиус-вектора, но и для  $\bar{V}$  вектор. величины.

$$\begin{aligned} w &= \frac{d^2 r}{dt^2} \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} + \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} + \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} + \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \Big|_I = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_m + \bar{\omega}_m \times \vec{r} \right) + \bar{\omega}_m \times \vec{V} = \\
 &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{d\bar{\omega}_m}{dt} \times \vec{r} + \bar{\omega}_m \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \bar{\omega}_m \times (\bar{\omega}_m \times \vec{r}) = \\
 &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{d\bar{\omega}_m}{dt} \times \vec{r} + \bar{\omega}_m \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \bar{\omega}_m \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \bar{\omega}_m \times (\bar{\omega}_m \times \vec{r}) = \\
 &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{d\bar{\omega}_m}{dt} \times \vec{r} + 2\bar{\omega}_m \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \bar{\omega}_m \times (\bar{\omega}_m \times \vec{r})
 \end{aligned}$$

$\underbrace{\quad}_{\text{Аном}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{Аном}^2} \quad \underbrace{\quad}_{\text{Аном}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{Аном}^2}$

Земная с.к.  $\omega_m = \Omega$   $\xi \eta \zeta$

$$\omega = \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\xi \eta \zeta} + 2\bar{\Omega} \times \vec{v} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \vec{r})$$

↓  
 центрист.  
 ускор., обусл. вращ. Земли  
 в/2 собствен. осн. вращ.

Проемы. на географ. с.к. при уст. неподв. Земной с.к.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{\xi \eta \zeta} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{XYZ} + \bar{\omega}_{XYZ} \times \vec{r}$$

$\omega_{XYZ}$  - сн-ть вращ. географ. с.к. отно Земной

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\xi \eta \zeta} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{XYZ} + \frac{d\bar{\omega}_{XYZ}}{dt} \times \vec{r} + \bar{\omega}_{XYZ} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \bar{\omega}_{XYZ} \times (\bar{\omega}_{XYZ} \times \vec{r}) + \\
 &+ \bar{\omega}_{XYZ} \times \frac{d\vec{r}}{dt}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\xi \eta \zeta} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{XYZ} + 2\bar{\omega}_{XYZ} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_{XYZ}}{dt} \times \vec{r} + \bar{\omega}_{XYZ} \times (\bar{\omega}_{XYZ} \times \vec{r})$$

↓ относ.      ↓ коррикт.      ↓ переносное

23.03.22

ЛЕКЦИЯ 9

$$W = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\xi\eta\zeta} + 2\vec{U} \times \vec{v} + \vec{U} \times (\vec{U} \times \vec{\varepsilon})$$

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\xi\eta\zeta} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{xyz} + \vec{\omega}'_{xyz} \times \vec{v}$$

→ ym. en-mo reop. c.k. oTH-ro zamech.

$$W = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{xyz} + (2\vec{U} + \vec{\omega}'_{xyz}) \times \vec{v} + \vec{U} \times (\vec{U} \times \vec{\varepsilon})$$

$$\vec{\omega}'_{xyz} = \vec{\omega}_{xyz} - \vec{U}$$

$$W = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{xyz} + (2\vec{U} + \vec{\omega}_{xyz} - \vec{U}) \times \vec{v} + \vec{U} \times (\vec{U} \times \vec{\varepsilon}) =$$

$$= \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{xyz} + (\vec{U} + \vec{\omega}_{xyz}) \times \vec{v} + \vec{U} \times (\vec{U} \times \vec{\varepsilon})$$

• Имеем реop. в фo мoбильн. кoорд. c.k.

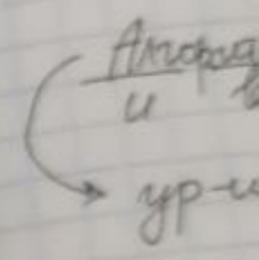
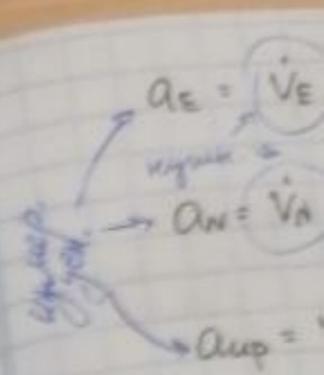
$$a = w - g^r$$

$$g = g^r - \vec{U} \times (\vec{U} \times \vec{\varepsilon})$$

$$a = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{xyz} + (\vec{U} + \vec{\omega}_{xyz}) \times \vec{v} - g = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{xyz} + \vec{U} \times \vec{v} + \vec{\omega}_{xyz} \times \vec{v} - g$$

$$\vec{U} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & U \cos \varphi & U \sin \varphi \\ V_E & V_N & V_{up} \end{vmatrix} = (U \cos \varphi V_{up} - U \sin \varphi V_N) \vec{i} + V_E U \sin \varphi \vec{j} - V_E U \cos \varphi \vec{k}$$

$$\vec{\omega}_{xyz} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_E & \omega_N & \omega_{up} \\ V_E & V_N & V_{up} \end{vmatrix} = (\omega_N V_{up} - \omega_{up} V_N) \vec{i} - (\omega_E V_{up} - \omega_{up} V_E) \vec{j} + \vec{k} (\omega_E V_N - \omega_N V_E)$$



- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

$$\begin{aligned}
 a_E &= \dot{V}_E + \underbrace{(\omega_N + U \cos \varphi) V_{up}}_{\Delta a_E^*} - (\omega_{up} + U \sin \varphi) V_N \\
 a_N &= \dot{V}_N + \underbrace{(\omega_{up} + U \sin \varphi) V_E}_{\Delta a_N^*} - \omega_E V_{up} \\
 a_{up} &= \dot{V}_{up} - (\omega_N + U \cos \varphi) V_E + \omega_E V_N - g
 \end{aligned}$$

Алгоритм - суть анализ. завес., позвол. по вх. парам и введ. нар. усл. получить парфот навигации и ориентации. упр-ие идеальной работы ИНС.

• Сюда комплекс. инструменты, погрешностей не вводит.

### Состав алгоритма.

1.  $\bar{V} = f(\bar{a})$
2.  $\varphi(\lambda) = f(a)$
3.  $\omega = f(\bar{V})$
4. Угол ориент. для пл. сист. попутанности типа измер. непосред. сигналов с ДУ, расположен. на осях кард. подвеса.  
Числ., числ., числ.

### Алгоритм

В пл ИНС: - 2 или 3 ТСГ либо 3 или 4 поправк. ДСГ  
- триада акселерометров  
- вольтметр  
- ДУ и т.д.

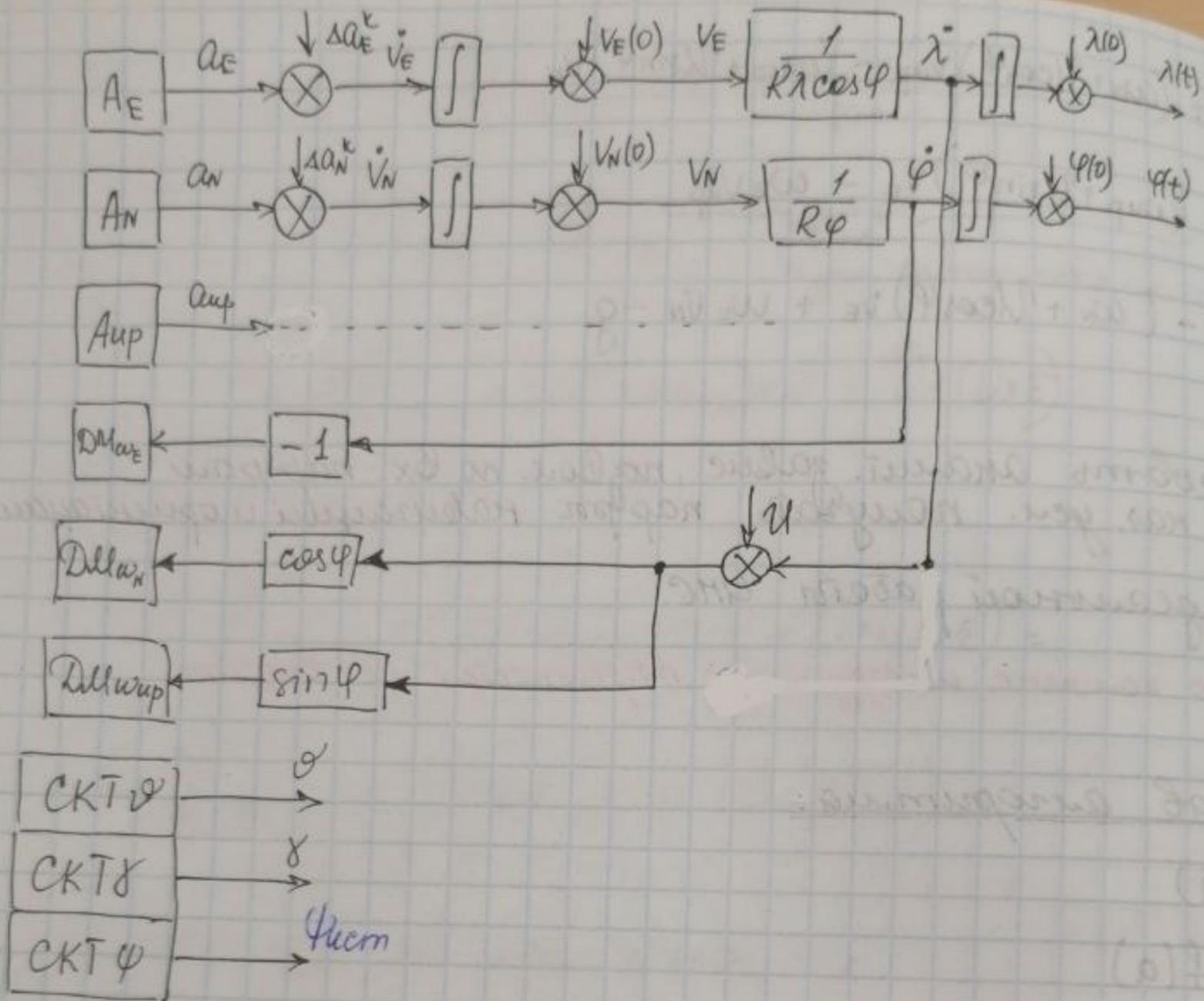
• Опорт. и навигаци. географ.

СКТ - синус-косинус. трансформатор

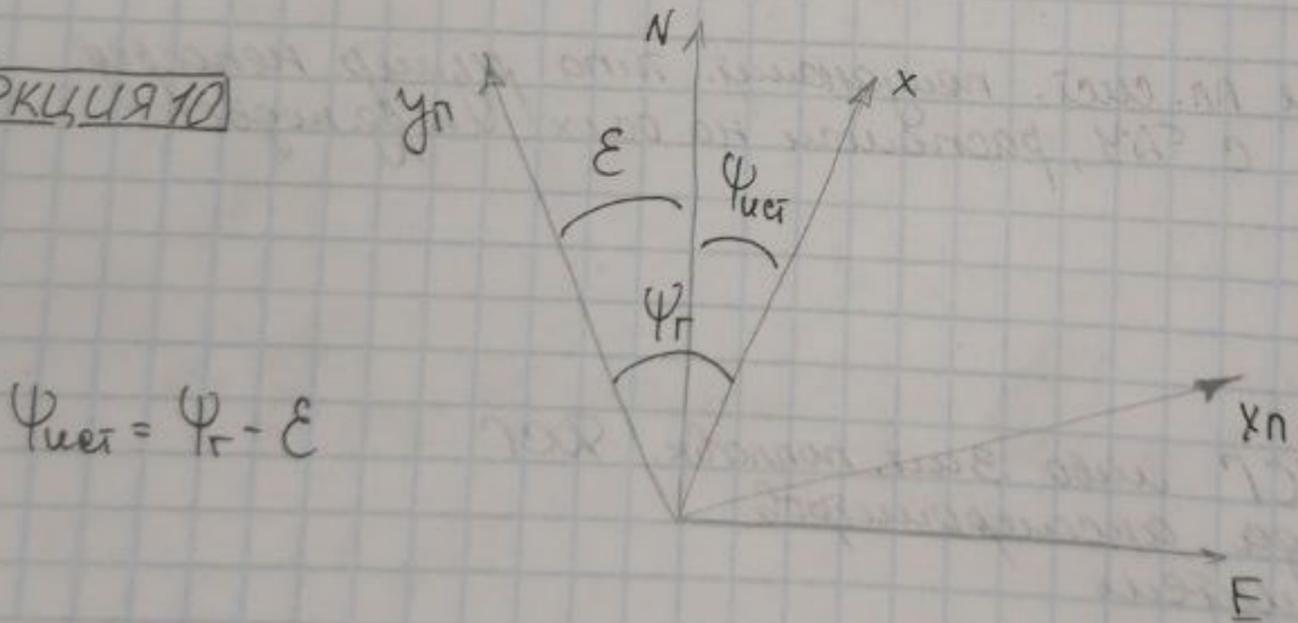
- $\delta$  и  $\vartheta$  измер-ся отно-но местн. гориз., т.е. завис. от ГВ
- step by step: в нар. месс. вр. необход. все нар. усл.

$V_{up}$  от внеш. ист-ка

Далее все усл. берутся с предыдуц. этапа.



Лекция 10



$$\psi_{\text{ист}} = \psi_{\text{г}} - \epsilon$$

Написать модель схему, если в нас-ве опор. с.к. - нулев.

# Преобразование систем координат поворотами.

Преув. ориент. с.к. из любого нач. положения м/б получена 3-ми плоскими поворотами, выполн. в опред. послед-ти.

3 угла - углы Эйлера

2 угла - углы Бутанова-Крилова

$$[r]_m = C_n^m [r]_n$$

матрица косинусов для перевода из n в m.

$$OXYZ \xrightarrow[\varphi_z]{z, z_1} OX_1Y_1Z_1 \xrightarrow[\varphi_x]{x_1, x_2} OX_2Y_2Z_2 \xrightarrow[\varphi_y]{y_2, y_p} OX_pY_pZ_p$$

$$C_{\varphi_z}$$

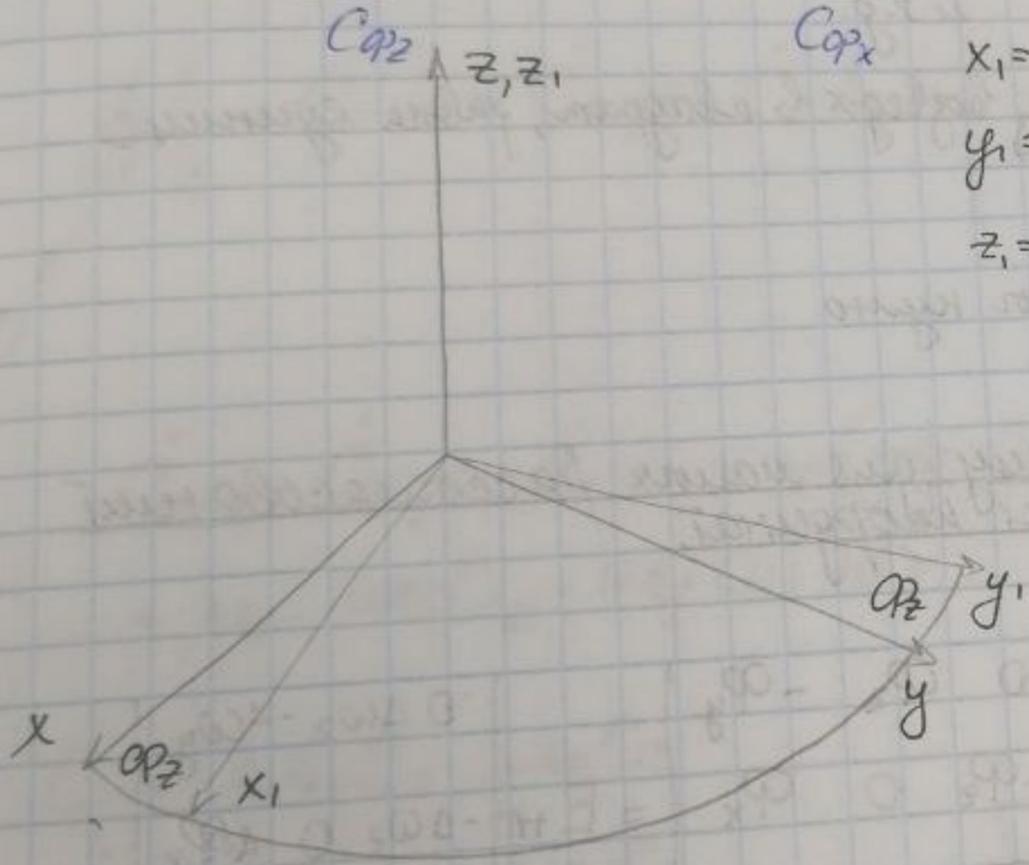
$$C_{\varphi_x}$$

$$C_{\varphi_y}$$

$$x_1 = x \cos \varphi_z + y \sin \varphi_z$$

$$y_1 = -x \sin \varphi_z + y \cos \varphi_z$$

$$z_1 = z$$



$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_z & \sin \varphi_z & 0 \\ -\sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$C_{\varphi_z}$

$$C_{XYZ}^{X_p Y_p Z_p} = C_{\varphi_y} \cdot C_{\varphi_x} \cdot C_{\varphi_z}$$

$$C_{11} = \cos \varphi_y \cos \varphi_z - \sin \varphi_x \sin \varphi_y \sin \varphi_z$$

$$C_{12} = \cos \varphi_y \sin \varphi_z + \sin \varphi_x \sin \varphi_y \sin \varphi_z$$

$$C_{13} = -\cos \varphi_x \sin \varphi_y$$

КЭХ

$$C_{21} = -\cos \varphi_x \sin \varphi_z$$

$$C_{22} = \cos \varphi_x \cos \varphi_z$$

$$C_{23} = \sin \varphi_x$$

$$C_{31} = \sin \varphi_y \cos \varphi_z + \sin \varphi_x \cos \varphi_y \sin \varphi_z$$

$$C_{32} = \sin \varphi_y \sin \varphi_z - \sin \varphi_x \cos \varphi_y \cos \varphi_z$$

$$C_{33} = \cos \varphi_x \cos \varphi_y$$

### Свойства матрицы направляющих косинусов.

- 1)  $\det(C) = 1$ .
- 2)  $C^{-1} = C^T$  → можно обрезать расчеты, т.к. в обычн. сп-бе необх. искать матр. инв. деп.
- 3) кажд. эл-т равен своему алг. дополн.  
 $C_{11} = C_{22}C_{33} - C_{32} \cdot C_{23}$  и т.д.
- 4) Сумма эл-в кажд. строки (столбца) возвед-х в квадрат, равна единице  
 $C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2 = 1$

Остальные преув. равны нулю

### Запишем данную матрицу для малых рассогласований систем координат.

$$C_{\Delta\varphi} = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_z & -\varphi_y \\ -\varphi_z & 1 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 1 \end{vmatrix} = E + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_z & -\varphi_y \\ -\varphi_z & 0 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 0 \end{vmatrix} = E + \begin{vmatrix} 0 & \Delta\omega_z & -\Delta\omega_y \\ -\Delta\omega_z & 0 & \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y & -\Delta\omega_x & 0 \end{vmatrix}$$

→ кососим.  
матр. малых углов  
приращ.

Сведем угл. ск-ти и матрицу косинусов.

Уравнение ориентации Ляссона.  
 $\bar{\varepsilon}$  - прецесс. вектор;  $\bar{v}$  (body) - кинетич. с.к.

$$\left. \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \right|_b + \bar{\omega}_b \times \bar{\varepsilon}$$

→ предифференциал ур-ие

$$\begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_I = C_b^I \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_b$$

$$\begin{cases} i_I = C_{11} \cdot i_b + C_{12} \cdot j_b + C_{13} \cdot k_b \\ j_I = C_{21} \cdot i_b + C_{22} \cdot j_b + C_{23} \cdot k_b \\ k_I = C_{31} \cdot i_b + C_{32} \cdot j_b + C_{33} \cdot k_b \end{cases}$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_I = \dot{C}_{11} \cdot i_b + \dot{C}_{12} \cdot j_b + \dot{C}_{13} \cdot k_b + \begin{vmatrix} i_b & j_b & k_b \\ \omega_{bi} & \omega_{bj} & \omega_{bk} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} \end{vmatrix}$$

0

$$\dot{C}_{11} \cdot i_b + \dot{C}_{12} \cdot j_b + \dot{C}_{13} \cdot k_b + i_b (\omega_{bj} \cdot C_{13} - \omega_{bk} \cdot C_{12}) + j_b (\omega_{bk} \cdot C_{11} - \omega_{bi} \cdot C_{13}) + k_b (\omega_{bi} \cdot C_{12} - \omega_{bj} \cdot C_{11}) = 0.$$

$$\dot{C}_{11} = \omega_{bz} C_{12} - \omega_{by} C_{13}$$

$$\dot{C}_{12} = \omega_{bx} C_{13} - \omega_{bz} C_{11}$$

$$\dot{C}_{13} = \omega_{by} C_{11} - \omega_{bx} C_{12}$$

$$\dot{C}_{21} = \omega_{bz} C_{22} - \omega_{by} C_{23}$$

$$\dot{C}_{22} = \omega_{bx} C_{23} - \omega_{bz} C_{21}$$

$$\dot{C}_{23} = \omega_{by} C_{21} - \omega_{bx} C_{22}$$

$$\dot{C}_{31} = \omega_{bz} C_{32} - \omega_{by} C_{33}$$

$$\dot{C}_{32} = \omega_{bx} C_{33} - \omega_{bz} C_{31}$$

$$\dot{C}_{33} = \omega_{by} C_{31} - \omega_{bx} C_{32}$$

Матриц. кинематич. ур-ие  
 Ляссона перех. от кинетич. с.к. к  
 кинетич. с.к.

$$\dot{C}_b^I = C_b^I [\omega_b]$$

$$[\omega_b] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{bz} & \omega_{by} \\ \omega_{bz} & 0 & -\omega_{bx} \\ -\omega_{by} & \omega_{bx} & 0 \end{bmatrix}$$

Эту матрицу мы можем  
 получить с ДУСов.

• Определ. будем эл-тот  
 матрицы косинусов

• Мо решить только 6 дур ур ии из 9, ост-е эиго  
наход-ся из свойства равенства всех эи-тае сдана  
ам. дополнения.

Введем две матр. ур ии Лясона для 2-х переменных

$$\frac{di}{dt} = \bar{\omega} x_i$$

$$\begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_m = C_n^m \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_n$$

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_m = \dot{C}_n^m \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_n + C_n^m \begin{vmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dj}{dt} \\ \frac{dk}{dt} \end{vmatrix}_n$$

$$C_n^m \bar{\omega}_m \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_m = \dot{C}_n^m \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_n + C_n^m \bar{\omega}_n \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_n$$

$$-C_n^m \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_n = \bar{\omega}_m \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_m + C_n^m \bar{\omega}_n \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}_n$$

$$\dot{C}_n^m = C_n^m \bar{\omega}_n - \bar{\omega}_m C_n^m$$

$$\bar{r}_m = C_n^m \bar{r}_n$$

$$\frac{d\bar{r}_m}{dt} = \dot{C}_n^m \bar{r}_n + C_n^m \frac{d\bar{r}_n}{dt}$$

$$\bar{\omega}_m \bar{r}_m = \dot{C}_n^m \bar{r}_n + C_n^m \bar{\omega}_n \bar{r}_n$$

$$\bar{\omega}_m (C_n^m \bar{r}_n) = \dot{C}_n^m \bar{r}_n + C_n^m (\bar{\omega}_n \bar{r}_n)$$

$$0 = (\bar{\omega}_m \bar{r}_n) \dot{C}_n^m + C_n^m (\bar{\omega}_m \bar{r}_n) - \dot{C}_n^m \bar{r}_n - C_n^m \bar{\omega}_n \bar{r}_n$$

$$0 = \dot{C}_n^m \bar{r}_n + C_n^m \bar{\omega}_n - \bar{\omega}_m C_n^m$$

$$\dot{C}_n^m = C_n^m \bar{\omega}_n - \bar{\omega}_m C_n^m$$

$$\dot{C}_m = C_n^m \bar{\omega}_n - \bar{\omega}_m C_n^m$$

$$C_m^n = C_m^v \check{\omega}_m - \check{\omega}_n C_m^n \quad n \rightarrow m$$

$\check{\omega}_m$  - косинус. matr. абс. уги. с.к.  $m$

$\check{\omega}_n$  - косинус. matr. абс. уги. с.к.  $n$

Лекция 11

6.04.22

Лекция 12

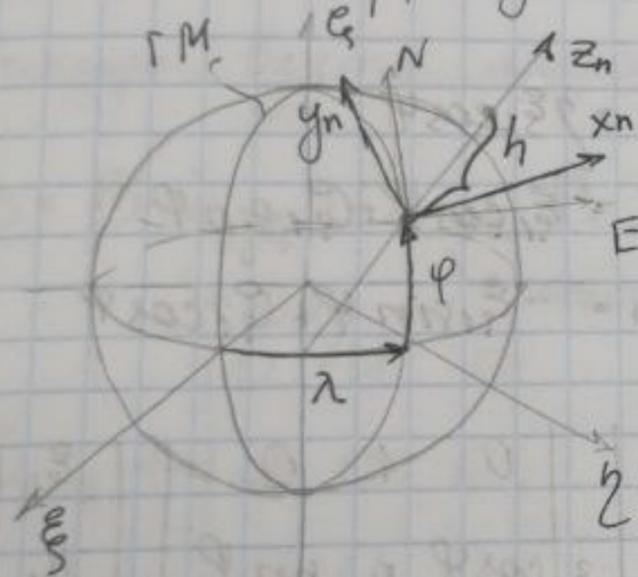
$$\check{\omega}_m = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{zm} & \omega_{ym} \\ \omega_{zm} & 0 & -\omega_{xm} \\ \omega_{ym} & \omega_{xm} & 0 \end{vmatrix}$$

### Всемирный алгоритм

• Алгоритм ИНС И-11; И-21.  $\rightarrow$  2 ТГ астиат.

- исп. ед. цифр. вычислитель

- вывести координаты самолета в сист. И-11 пров. в центр. связ. с Землей, с.к.  $\rightarrow$  навиг. с.к. - центр. связ. с Землей, с.к.



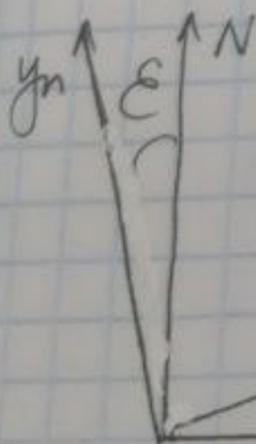
Коорд. 1  $\lambda$  - геогр. долг.

$\varphi$  - геогр.

$h$  - высота над пов. то

$\xi \eta \zeta \rightarrow$  навиг. с.к.

Оси чувств. гироскопов и акселерометров по всем направлениям в азимуте с.к.

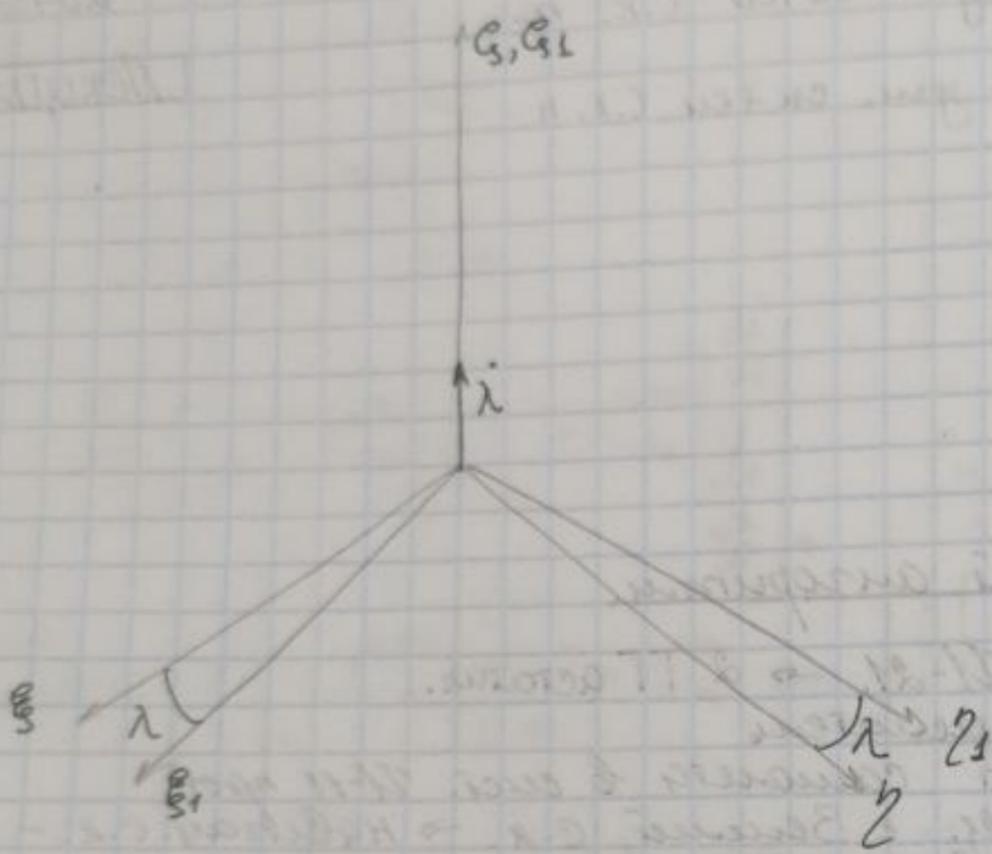


$\epsilon$  - азимут. угол.

• Особенность всемирного алгоритма в том, что там координаты  $\lambda$  и азимут. угол  $\epsilon$  вычисляются из этой матрицы направ. косинусов между осями трехгран.  $\xi \eta \zeta$  и  $X_n Y_n Z_n$ . Элементы этой matr. направ. косинусов определяются на основе решения системы уравнений Буассона

B-матрица перехода от  $\xi, \eta, \zeta$  к  $X_n, Y_n, Z_n$

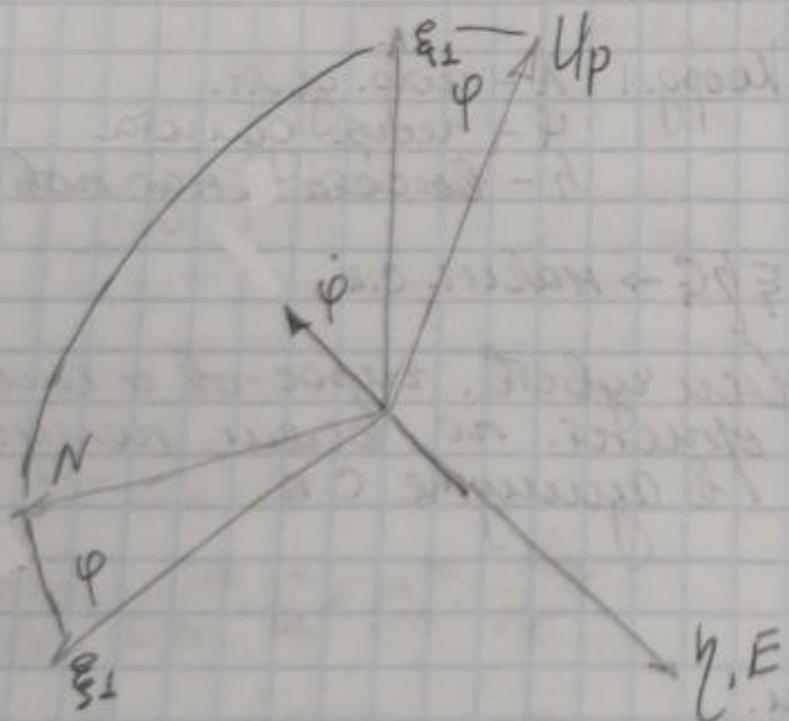
$$\xi, \eta, \zeta \xrightarrow[\lambda]{\xi, \zeta_1} \xi_1, \eta_1, \zeta_1 \xrightarrow[-\varphi]{\eta_1, E} EN \xrightarrow[\varepsilon]{U_p Z_n} X_n, Y_n, Z_n$$



$$\begin{cases} \xi_1 = \xi \cos \lambda + \eta \sin \lambda \\ \eta_1 = -\xi \sin \lambda + \eta \cos \lambda \\ \zeta_1 = \zeta \end{cases}$$

$\xi_1$	$\cos \lambda$	$\sin \lambda$	0
$\eta_1$	$-\sin \lambda$	$\cos \lambda$	0
$\zeta_1$	0	0	1

$B_\lambda$



$$E = \eta$$

$$N = \xi_1 \cos \varphi + \zeta_1 \sin \varphi$$

$$U_p = -\xi_1 \sin \varphi + \zeta_1 \cos \varphi$$

$E$	0	1	0	$\xi_1$
$N$	$\cos \varphi$	0	$\sin \varphi$	$\eta_1$
$U_p$	$-\sin \varphi$	0	$\cos \varphi$	$\zeta_1$

$B_\varphi$

$$X_n = E \cos \varepsilon + N \sin \varepsilon$$

$$Y_n = -E \sin \varepsilon + N \cos \varepsilon$$

$$Z_n = U_p$$

$X_n$	$\cos \varepsilon$	$\sin \varepsilon$	0	$E$
$Y_n$	$-\sin \varepsilon$	$\cos \varepsilon$	0	$N$
$Z_n$	0	0	1	$U_p$

$B_\varepsilon$

$$\begin{matrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{matrix} = B \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \quad B = B_E \cdot B_\varphi \cdot B_\lambda$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\sin\varphi \cos\lambda \sin\varepsilon - \sin\lambda \cos\varepsilon \\ b_{12} &= \cos\lambda \cos\varepsilon - \sin\varphi \sin\lambda \cos\varepsilon \\ b_{13} &= \cos\varphi \sin\varepsilon \\ b_{21} &= -\sin\varphi \cos\lambda \cos\varepsilon + \sin\lambda \sin\varepsilon \\ b_{22} &= -\sin\varphi \sin\lambda \cos\varepsilon - \cos\lambda \sin\varepsilon \\ b_{23} &= \cos\varphi \cos\varepsilon \\ b_{31} &= \cos\varphi \cos\lambda \\ b_{32} &= \cos\varphi \sin\lambda \\ b_{33} &= \sin\varphi \end{aligned}$$

• Если изв. элементы  $B$ , то по полноте решим задачу навиг. в части опред. координат

$$\begin{aligned} \lambda &= \arctg \frac{b_{32}}{b_{31}} [0 \dots 180^\circ] \\ \varphi &= \arctg \frac{b_{33}}{\sqrt{b_{23}^2 + b_{13}^2}} [0, 90^\circ] \\ \varepsilon &= \arctg \frac{b_{13}}{b_{23}} \end{aligned}$$

Откуда взять матрицу  $B$

$$\dot{B} = B \cdot \overset{\vee}{\omega}_{\xi\eta\zeta} - \overset{\vee}{\Omega}_{X_n Y_n Z_n} B$$

$\rightarrow$  связ.  $\rightarrow$  навиг.

$$\overset{\vee}{\omega}_{\xi\eta\zeta} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

• Сопред. степенью точности изв. ск-ть, что отнес. систы  $b/r$  вертика. оси равносущны.  
 $\rightarrow$  две средн. широт.

$$\overset{\vee}{\omega}_{X_n Y_n Z_n} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{zn} & \omega_{yn} \\ \omega_{zn} & 0 & -\omega_{xn} \\ -\omega_{yn} & \omega_{xn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & U \sin\varphi & \omega_{yn} \\ U \sin\varphi & 0 & -\omega_{xn} \\ -\omega_{yn} & \omega_{xn} & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_{yn} \\ 0 & 0 & -\omega_{xn} \\ -\omega_{yn} & \omega_{xn} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\dot{B} = \ominus \overset{\vee}{\Omega}_{X_n Y_n Z_n} B$$

$\rightarrow$  заето вносит в  $\overset{\vee}{\Omega}_{X_n Y_n Z_n}$

$\rightarrow$  всео диф. ур-ий 9, решать будем в.

$$b_{12} = \Omega_{yn} b_{23}$$

$$b_{22} = \Omega_{xn} b_{32}$$

$$b_{32} = \Omega_{yn} b_{12} - \Omega_{xn} b_{22}$$

$$b_{13} = -\Omega_{yn} b_{33}$$

$$b_{23} = \Omega_{xn} b_{33}$$

$$b_{33} = \Omega_{yn} b_{13} - \Omega_{xn} b_{23}$$

н.у:  $b_{12}(0) = \cos \alpha \cos \epsilon_0 - \sin \alpha \sin \epsilon_0$   
и т.д.

$$b_{11} = b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32}$$

$$b_{21} = b_{12} \cdot b_{33} - b_{13} \cdot b_{23}$$

$$b_{31} = b_{12} \cdot b_{23} - b_{13} \cdot b_{22}$$

• Астат. ТГ созы. баг. с.к. и опрег. напр-е осей кубев. акс-ов.

$$\Omega_{xn} = -\frac{V_{yn}}{R_{xn}} - e^2 \frac{b_{13} \cdot b_{23}}{a} \cdot V_{xn}$$

$e^2$  - кубар. перв. оксимкар  
 $a$  - болонг. немурь

$$\Omega_{yn} = \frac{V_{xn}}{R_{yn}} + e^2 \frac{b_{13} \cdot b_{23}}{a} \cdot V_{yn}$$

$$\frac{1}{R_{xn}} \approx \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{e^2}{2} b_{33}^2 + e^2 b_{13}^2 - \frac{h}{a} \right)$$

$$\frac{1}{R_{yn}} \approx \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{e^2}{2} b_{33}^2 + e^2 b_{23}^2 - \frac{h}{a} \right)$$

радиусеи кривизнеи  
и осей.

### Лекция 13

$$\dot{V}_{xn} = a_{xn} - (\Omega_{yn} + U_{yn}) V_{zn} + 2 V_{zn} V_{yn}$$

$$\dot{V}_{yn} = a_{yn} + (\Omega_{xn} + U_{xn}) V_{zn} - 2 V_{zn} V_{xn}$$

$$U_{xn} = U \cos \varphi \sin \epsilon = U b_{13}$$

$$U_{yn} = U \cos \varphi \cos \epsilon = U b_{23}$$

$$U_{zn} = U \sin \varphi = U b_{33}$$

Упр-е созы-е на пероектои

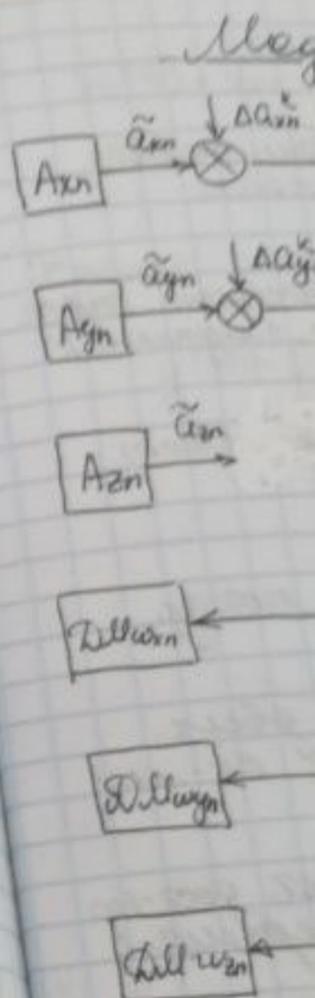
$$\omega_{xn} = \Omega_{xn} + U_{xn}$$

$$\omega_{yn} = \Omega_{yn} + U_{yn}$$

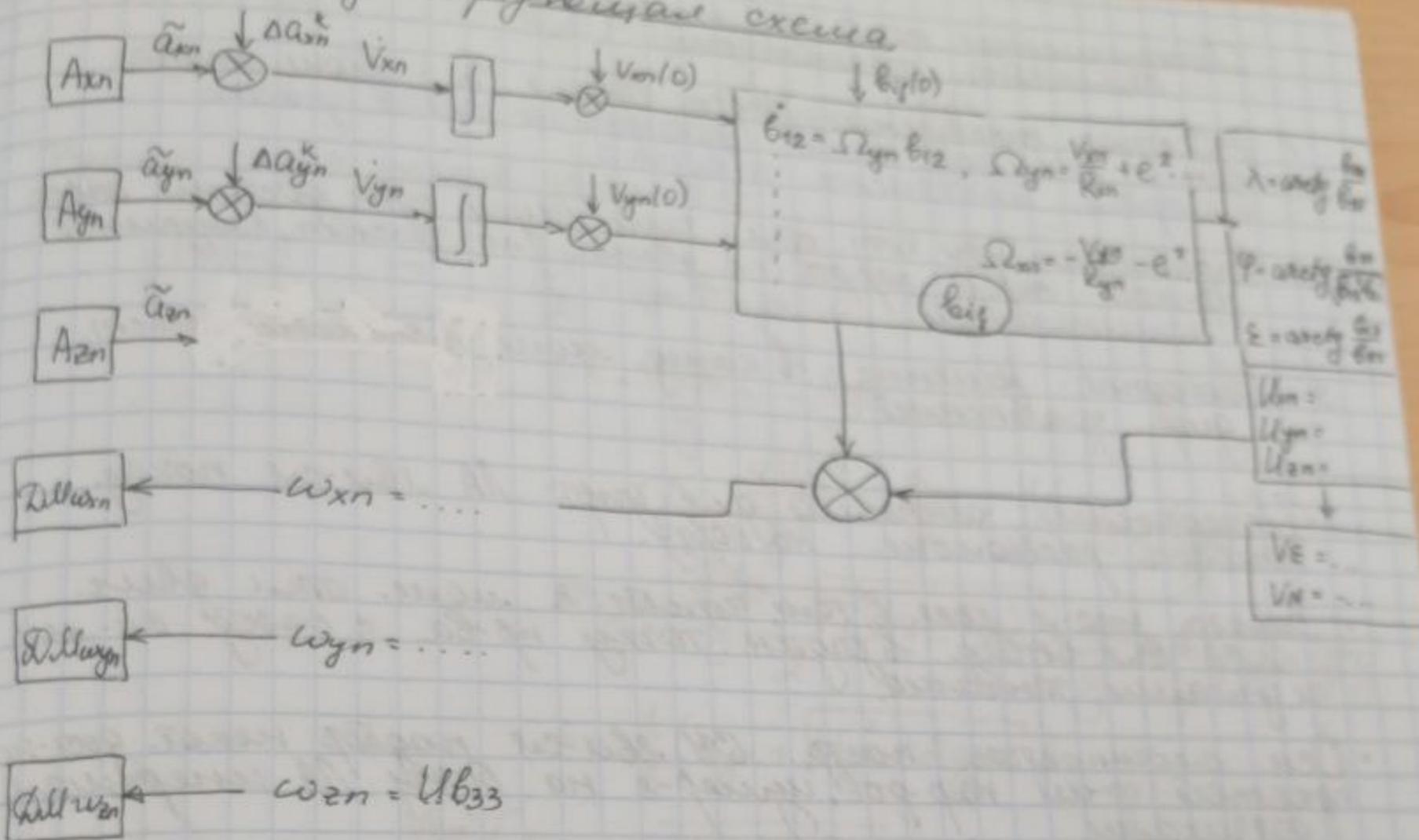
$$\omega_{zn} = U_{zn}$$

$$V_E = V_{xn} \cos \epsilon + V_{yn} \sin \epsilon$$

$$V_N = V_{xn} \sin \epsilon + V_{yn} \cos \epsilon$$



# Модернизация схема



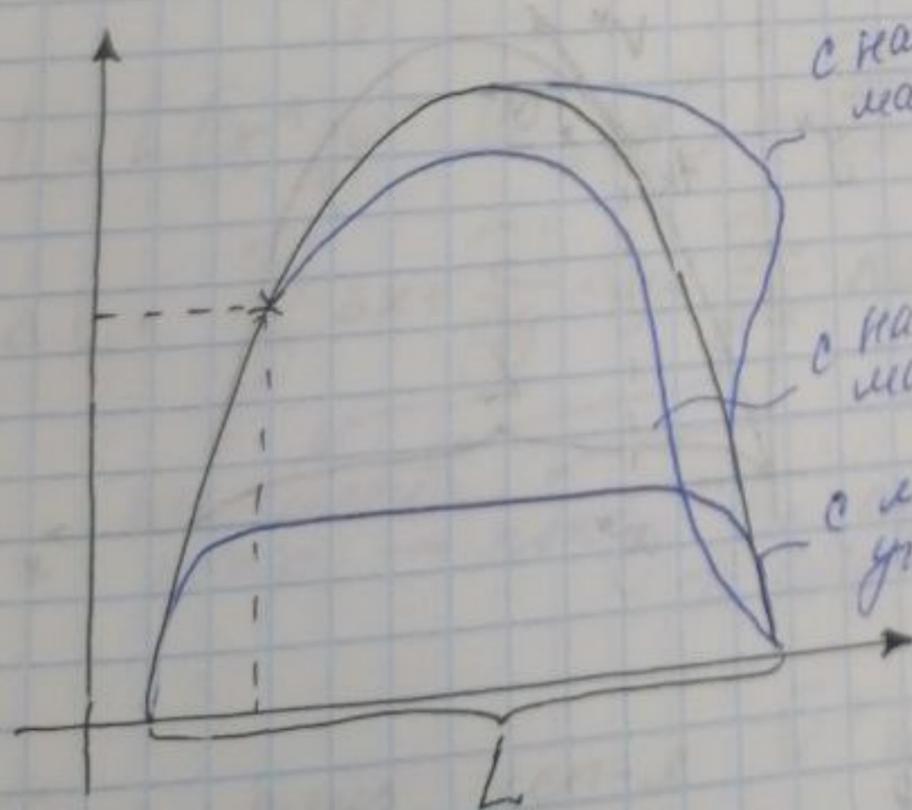
## Аналитического типа ИНС.

3.04.2019

ЛЕКЦИЯ 19

- Решение задачи навигации и ориентации завис. от назначения систем и Ч.Э.
- измер. в инерц. старт. ск.  $\rightarrow$  интегр.  $\rightarrow$  коорд в инерц. с.к.

### Баллистическая ракета



- Активной участка:  $\rightarrow$  процесс управ.
- $\sim$  работает ИНС
- $\sim$  работает д.в.и.
- Цель - достичь опред. пар-ров боепител. объекта по наим. траектории
- После  $x$ , где время отсчета д.в.и., процесс неконтрол. полет по баллист. траект.
- $\sim$  сейчас стелюжи не преувелич. сложностей.

Достижение неск. дальности при классич. движении траектории.

1. Искусное управление: опред. время  $t_k$  - мом. выключения двиг.: при  $V_{xk}$ ,  $V_{yk}$  внеш. факторов на актив. участке коррект. алгоритма невозможна.
2. Управление, при кот. откл. тем осущ. при достиж. откл. ф-цией опред. парр-ов. (т.е. движ. по траект., близкой к номинальной)
3. Свободное: решение в кажд. мом. времени сист. диф. уравнений.

- Исходными данными для упр. ЛА явл-ся показ приборов, расстояние на борту.
- Задача упр-я свод. в том, чтобы к мом. откл. движ. ЛА был всегда в задан. точке пр-ва с опред. ск-стью и углами тангажа.
- Осн. сложностью постро. СЧ явл-ся подбор некот. дост-нейшей ф-ции парр-ов, измер-х на борту ЛА и информации датчиками.  
Эта ф-ция долб такова, что при достиж. ею заранее задан. знач-я было бы предув. откл. двигателям, обеспечив при этом задан. дальность.  
Ф-ция носит название баллистической ф-ции (управляющей ф-ции / управляющего функционала).

Рассм. на простейш. примере постро. баллист. ф-ции.

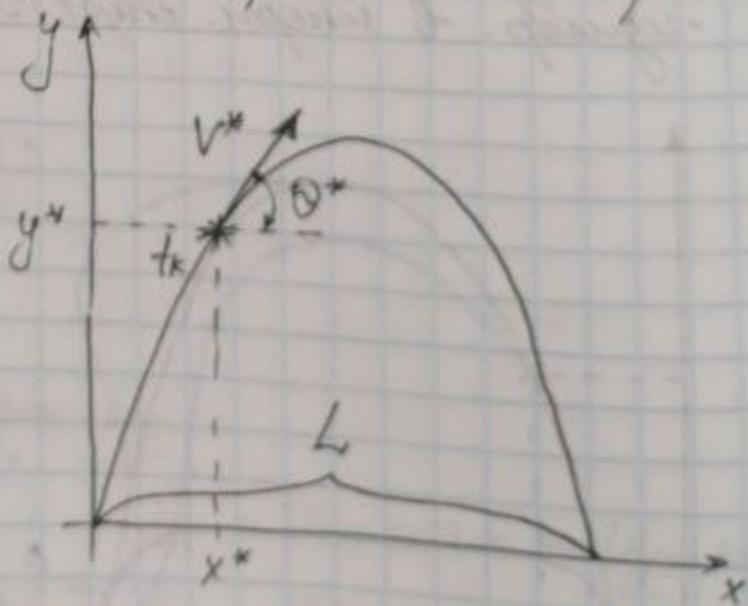
- $V^*$  - расчет. парр
- $V$  - текущ. парр
- $V_k$  - парр гранич. точки

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

$$V_x(0) = V_{xk}; \quad V_y(0) = V_{yk};$$

$$y(0) = y_k; \quad x(0) = x_k.$$

• Будем счит., что время на пассив. уч-ке сточит заново



$$V_x(t) = V_{xk}$$

$$x(t) = x_k$$

Время откл.

$$y(\tau) = 0$$

$$L = x(t)$$

$$\Delta x =$$

$$V_x(t) = V_{xk}$$

$$V_y(t) = V_{yk} - gt$$

$$x(t) = x_k + V_{xk} \cdot t; \quad y(t) = y_k + V_{yk} \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Время оконч. пассив. ур-ка  $t = \tau$

$$y(\tau) = 0 \rightarrow -\frac{g\tau^2}{2} + V_{yk}\tau + y_k = 0$$

$$\tau^2 - \frac{2V_{yk}}{g}\tau - \frac{2y_k}{g} = 0.$$

$$\tau = D = \frac{4V_{yk}}{g^2} + \frac{2y_k}{g} = \frac{4}{g^2} \left( V_{yk} + \frac{2y_k g}{4} \right)$$

$$\tau_{1,2} = \frac{2V_{yk}}{g} \pm \sqrt{\frac{4}{g^2} \left( V_{yk} + \frac{2y_k g}{4} \right)} = \frac{V_{yk}}{g} \pm \frac{1}{g} \sqrt{V_{yk}^2 + \frac{2y_k g^2}{g}}$$

$$\tau = \frac{1}{g} \left( V_{yk} + \sqrt{V_{yk}^2 + 2gy_k} \right)$$

$$L = x(\tau) = x_k + \frac{V_{xk}}{g} \left( V_{yk} + \sqrt{V_{yk}^2 + 2gy_k} \right)$$

$$\Delta x = x - x^*; \quad \Delta y = y - y^*; \quad \Delta V_x = V_x - V_x^*; \quad \Delta V_y = V_y - V_y^*; \quad \Delta \sigma = \sigma - \sigma^*$$

$$L = L(x^* + \Delta x; y^* + \Delta y; V_x^* + \Delta V_x; \dots)$$

Разложим в ряд Тейлора для ф-ии неск. перемен.  
прав. часть.

$$L = L(x^*; y^*; V_x^*; V_y^*) + \frac{\partial L}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial L}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial L}{\partial V_x} \Delta V_x + \frac{\partial L}{\partial V_y} \Delta V_y$$

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial L}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial L}{\partial V_x} \Delta V_x + \frac{\partial L}{\partial V_y} \Delta V_y$$

большест. коэф.  $\rightarrow$  показ. вклад кажде из перемен.  
в общ. ошибку по дальности.

Для случ. исп-я  $V^*$  и  $\sigma$  большест. коэф. в метре.

$$K_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 1; \quad K_y = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{V_{yx}}{\sqrt{V_{yx}^2 + 2gy}}; \quad \frac{\partial L}{\partial V_x} = \frac{1}{g} (\sqrt{V_{yx}^2 + 2gy} + V_{yx})$$

$$K_{V_y} = \frac{\partial L}{\partial V_y} = \frac{V_{yx}}{g} + \frac{V_{yx} V_{yx}}{g \sqrt{V_{yx}^2 + 2gy}}$$

• Наиб. вклад вносит ошибки, связ. со см. и углом тангенса

$$L(x, y, V_x, V_y) - L(x^*, y^*, V_x^*, V_y^*) = \Delta L$$

$$(K_x \cdot x + K_y \cdot y + K_{V_x} \cdot V_x + K_{V_y} \cdot V_y) - (K_x \cdot x^* + K_y \cdot y^* + K_{V_x} \cdot V_x^* + K_{V_y} \cdot V_y^*)$$

$$\Delta L \rightarrow \min$$

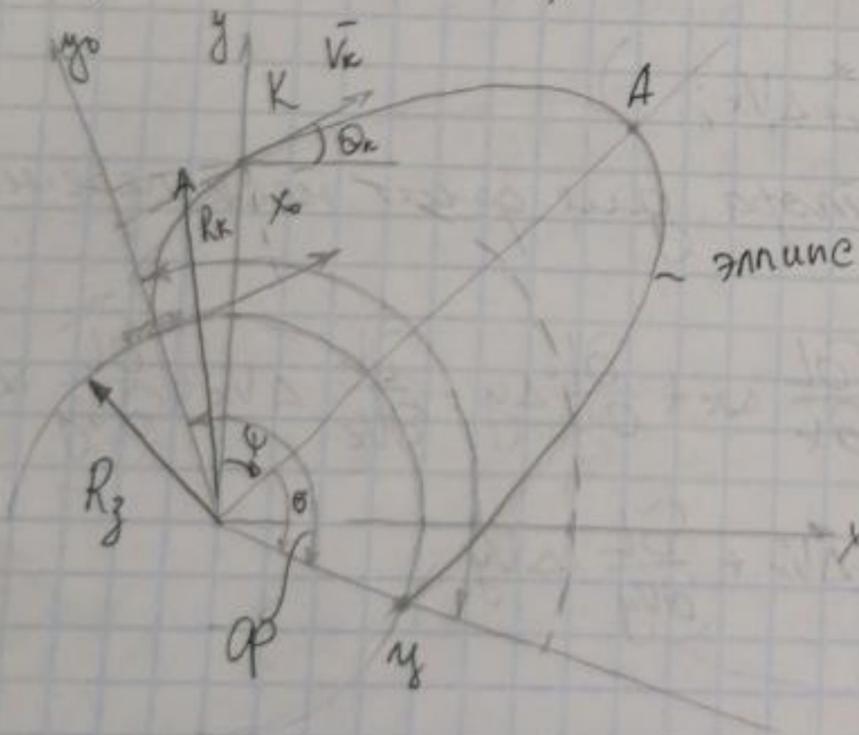
$K_x, K_y, K_{V_x}, K_{V_y} \rightarrow$  изв. в заранее.

$x, y, V_x, V_y \rightarrow$  изв. ТИЛУ

• В мом. време, когда  $\Delta L \min$ , под-се считаем две точки двум-ней!

Кеплер. траект (эллиптическая)

В связи с больш. высотой подъема ракет улет. измен. велич. ускор. гравитацион. поле с высотой. Тогда на пассив. ур-ке будет эллиптич. траект. Кеплера.



Если плоское гравитационное поле пересекает (рассм.) в гелиоцентре.  
 перпендикуляр с.к.  $R_k$ , то на пасивн. ур-не

$$R = \frac{\rho}{(1 - e \cos(\psi - \lambda))} \quad , \text{ где } \rho = 2kR_k \omega^2 \Theta_k - \text{ фокальн. радиус, забик. с } V_k \text{ в точке } K,$$

$e$  - эксцентриситет,  $\psi$  - угол, характ. напр. и. осей эллипса,

$$K = \frac{V_k^2 R_k}{2IM} - \text{коэфф.}$$

$IM = 3,986 \cdot 10^{14} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$  - произв. гравит. пост. на массу Земли

При  $R = R_k$  и  $\lambda = 0$ .  $\psi = \arccos \frac{R_k - \rho}{R_k e}$

При  $\psi = \lambda$  макс. высота подъема ракеты

$$h_{\max} = \frac{\rho}{1 - e} - R_k - \text{высота траект.}$$

Для опред. дальности пасивн. ур-на неох. угол  $\sigma$

При  $R = R_k$  и  $\lambda = \psi + \sigma$ , макс.  $\sigma = \arccos \left( \frac{R_k - \rho}{R_k e} \right)$

Форм. дальность полета:

$$L_{\text{окт}} = R_k \lambda_k, \quad L_{\text{нас}} = R_k (\psi + \sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = R_k (\lambda_k + \psi + \sigma), \quad \text{где } \lambda_k = \arctg \left( \frac{x_k}{R_k + y_k} \right)$$

$\Rightarrow L = L(x_k, y_k, V_k, \Theta_k)$ . Однако в этом случае

под дальностью  $L$  понимаем дугу  $OC$  с углом

$$\varphi = \psi + \sigma + \lambda$$

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k + \frac{\partial L}{\partial y_k} \cdot \Delta y_k + \frac{\partial L}{\partial V_k} \cdot \Delta V_k + \frac{\partial L}{\partial \Theta_k} \cdot \Delta \Theta_k$$

$$K_x = \frac{\partial L}{\partial x_k} = 1$$

$$K_y = \frac{\partial L}{\partial y_k} = 2 \operatorname{ctg} \Theta_k - \cos(\varphi + \Theta_k) / \sin \Theta_k;$$

$$K_V = \frac{\partial L}{\partial V_k} = 2 R_k \frac{\sin \varphi + \operatorname{ctg} \Theta_k (1 - \cos \varphi)}{V_k}$$

$$K_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2Rg \cdot \left( \frac{\sin \theta + 2\theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} - 1 \right)$$

$$\Delta L = K_x (x_k - x_k^*) + K_y (y - y_k^*) + K_v (V_i - v_k^*) + K_{\theta} (\theta - \theta_k^*)$$

$$\Delta L = \varphi - \varphi^* = \underbrace{(K_x x + K_y y + K_v v + K_{\theta} \theta)}_{\varphi} - \underbrace{(K_x x_k^* + K_y y_k^* + K_v v_k^* + K_{\theta} \theta_k^*)}_{\varphi^*}$$

20.04.22.

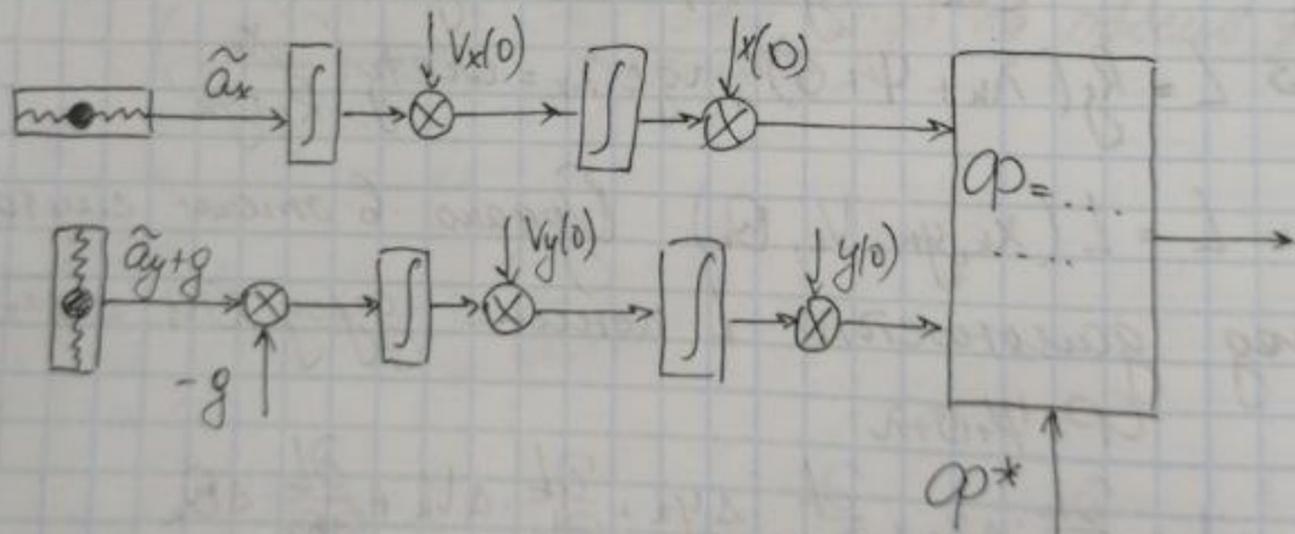
ЛЕКЦИЯ 15

Мировое схематическое представление динамики планета БР.

1. Два взаимно ортогональных акса на поверхности планеты. матрица динамики экватор. упр-я ф-ии

$$\varphi = x + \frac{\partial L}{\partial y_k} y - \frac{\partial L}{\partial v_{xk}} (v_{xk} + \frac{\partial L}{\partial y_k} v_{yk})$$

$$\varphi^* = x_k^* + \frac{\partial L}{\partial y_k} y_k^* + \frac{\partial L}{\partial v_{xk}} (v_{xk}^* + \frac{\partial L}{\partial y_k} v_{yk}^*)$$



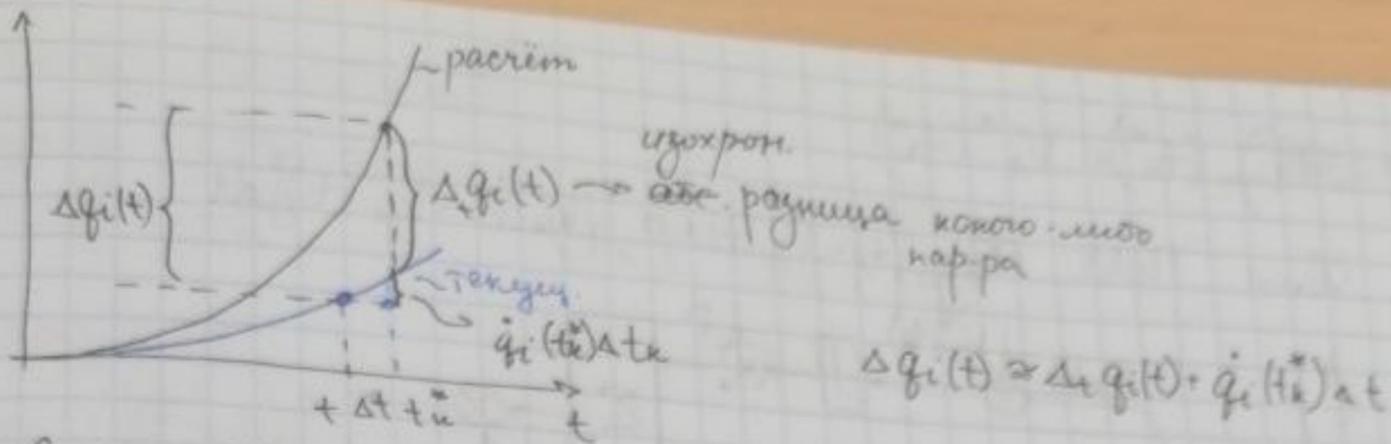
С.к. - инерц. стартовой трехгранник.  
Флатор - неуправляемая.

Для большой дальности

$$L = f(V_{\eta}(t); V_{\xi}(t); \xi(t); \eta(t); \theta(t); t)$$

$$\Delta L = L - L^* = \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \Delta V_{\xi} + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \Delta V_{\eta} + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t_k$$

• Частн. пренебр. - баллист. коэф.



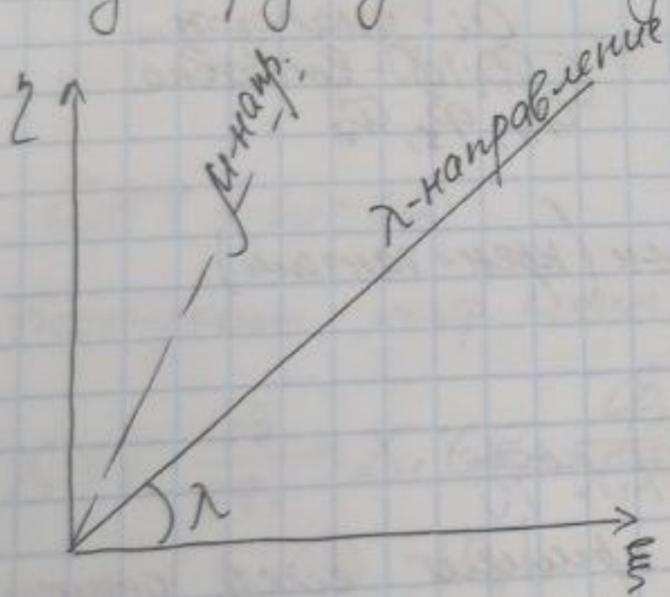
Далее введем в расчет изохронную вариацию пар-ра (при одном и том же времени)

- Введение изохрон. вариации позволяет сум. обр. упрощения вид упр. ф-ии и упрощ. составл., след. с. реш.

$$Q(t) = \frac{\partial L}{\partial v_{\xi}} \cdot v_{\xi}(t) + \frac{\partial L}{\partial v_{\eta}} \cdot v_{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \cdot \Delta_t \xi(t) + \frac{\partial L}{\partial \eta} \cdot \Delta_t \eta(t)$$

$$Q^*(t) = \frac{\partial L}{\partial v_{\xi}} \cdot v_{\xi}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial v_{\eta}} \cdot v_{\eta}^*(t_k^*)$$

- Стараемся еще больше упростить аппарат. часть → ГИЛУ вынесем акс-в. + упростим упр. возд. → устан. ГИЛУ под опред. упр. и возд. с.к.



$$V_{\lambda} = V_{\xi} \cos \lambda + V_{\eta} \sin \lambda$$

$$|\vec{V}_{\lambda}| = \sqrt{V_{\xi}^2 + V_{\eta}^2} \quad - \text{модуль}$$

$$\arg \lambda = \arctg \frac{V_{\eta}}{V_{\xi}} \quad - \text{напр-е}$$

$$|\Delta| = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial v_{\xi}}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial v_{\eta}}\right)^2}$$

$$\arg \Delta = \frac{\partial}{\partial v_{\eta}} / \frac{\partial}{\partial v_{\xi}}$$

- Мож-но все сделать для μ-напр-я, а тогда пром. все аналог. возд. с изохрон. вариация по коорд.

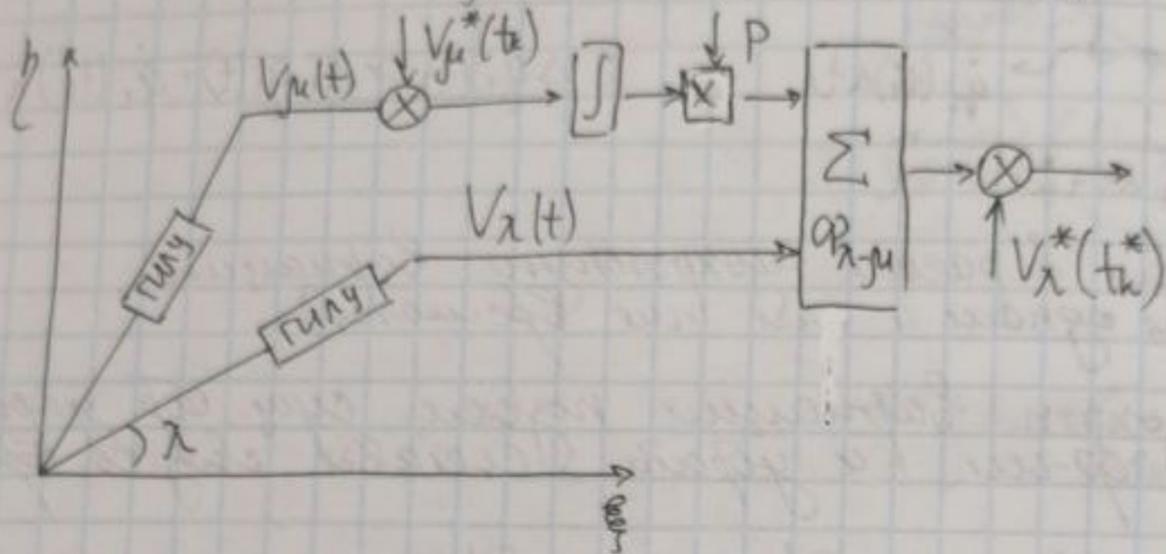
$$Q_{\lambda-\mu}(t) = V_{\lambda}(t) + p \Delta_t S_{\mu}(t)$$

$$p = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \eta}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial v_{\xi}}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial v_{\eta}}\right)^2}}$$

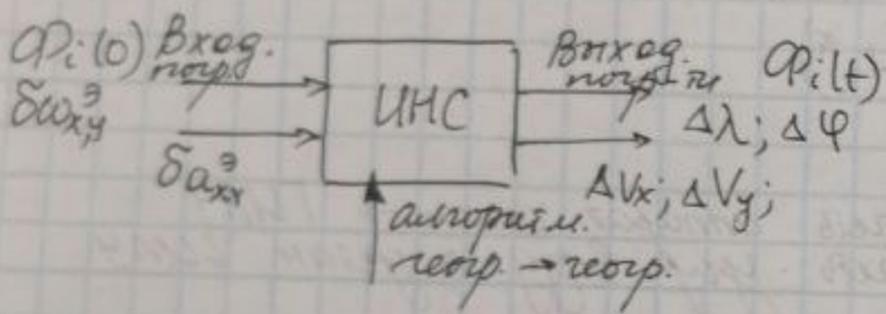
$$\Delta_t S_{\mu} = \sqrt{\Delta_t \xi(t) + \Delta_t \eta(t)}$$

$$\varphi_{\lambda-\mu}^*(t_k^*) = V_{\lambda}^*(t_k^*)$$

Для ГИУ:  $\varphi_{\lambda-\mu}(t) = V_{\lambda}(t) + p \int [V_{\mu}(t) - V_{\mu}^*(t)] dt$



### Погрешности двухканальной ИНС



ИНС - алгоритмы работы идеальной ИНС  
Геогр. координ. трехгран XYZ

$$\delta a_i^2 = \delta a_i + \delta h_i \cdot a_i$$

$$\delta \omega_i^2 = \delta \omega_i + \delta h_i \cdot \omega$$

$a_i$  - диапазон.  
 $\varphi_i(0)$  - выставка  
 $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$

$\varphi_x(0), \varphi_y(0)$  - ошибки прибор. вертикали (крен + тангаж)

$\varphi_z(0)$  - ошибка опред. курса.

отклон. осей платф. от-но идеал. геогр. коорд.

При вводе урий погрешностей, применим след. допущ.

1. Земля - сфера
2. Гравитационное поле - центральное
3. Все вх. и вых. погрешности являются мал. велич.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_x + (U \sin \varphi + \omega_e) v_y \\ \dot{y} &= a_y - (U \sin \varphi + \omega_e) v_x \\ \dot{\varphi} &= \frac{v_y}{R} = -\omega_x' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_y' &= \frac{v_x}{R} \\ \omega_x' &= -\frac{v_y}{R} \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda} = \omega_y' \sec \varphi$$

$$\omega = \begin{cases} \omega_x = -\frac{v_y}{R} = \omega_x' \\ \omega_y = U \cos \varphi + \omega_y' \\ \omega_z = U \sin \varphi + \omega_z' \end{cases} \leftarrow \text{алгоритм реор-реор.}$$

Уравнения ошибок ориентации.

XYZ - идеал. с.к.  
 X<sub>св</sub> Y<sub>св</sub> Z<sub>св</sub> - свез. с.к. → раском. - ошибки раском. м/у этими с.к.  
 → φ<sub>z</sub>(t), φ<sub>y</sub>(t), φ<sub>x</sub>(t).

$$\begin{aligned} \omega_{абс}^{nn} &= \omega^{уип} + \omega^{возм} & \tilde{\omega}^{уип} &= \text{расчет. знач.} \\ \omega^{уип} &= \frac{M^{уип}}{H} = K_i \cdot \tilde{\omega}^{уип} \end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}^{уип} = \omega + \Delta\omega$$

Построим матр. косин.

$$XYZ \xrightarrow[\dot{z}z_1]{\dot{\varphi}_z} X_1 Y_1 Z_1 \xrightarrow[\dot{x}_1 x_2]{\dot{\varphi}_x} X_2 Y_2 Z_2 \xrightarrow[\dot{y}_2 y_{св}]{\dot{\varphi}_y} X_{св} Y_{св} Z_{св}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_z & -\varphi_y \\ -\varphi_z & 1 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\omega^{св} = C \cdot \omega + C \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{vmatrix}$$

$$\omega_x^{св} = \dot{\varphi}_x + \omega_x + \varphi_z \omega_y - \varphi_y \omega_z$$

$$\omega_y^{св} = \dot{\varphi}_y + \omega_y + \varphi_x \omega_z - \varphi_z \omega_x$$

$$\omega_z^{св} = \dot{\varphi}_z + \omega_z + \varphi_y \omega_x - \varphi_x \omega_y$$

Провариваем φ-от аксиомы (1)

$$\begin{cases} \Delta \omega_x = \Delta \omega_x' \\ \Delta \omega_y = \Delta \omega_y' - U \sin \varphi \cdot \Delta \varphi \\ \Delta \omega_z = U \cos \varphi \Delta \varphi + (\omega_y \sec^2 \varphi) \Delta \varphi \end{cases}$$

• Переходим к сф.

$$\dot{\varphi}_x + \varphi_z \omega_y - \varphi_y \omega_z = \Delta \omega_x' + \delta \omega_x^3$$

$$\dot{\varphi}_y + \varphi_x \omega_z - \varphi_z \omega_x = \Delta \omega_y' - U \sin \varphi \Delta \varphi + \delta \omega_y^3$$

$$\dot{\varphi}_z + \varphi_y \omega_x - \varphi_x \omega_y = (U \cos \varphi + \omega_y \sec^2 \varphi) \Delta \varphi + \delta \omega_z^3 - \omega_y \operatorname{tg} \varphi$$

• Решить в числ. виде невозм.

$$\tilde{a}_i^{cb} = a_i^{cb} + \delta a_i^3$$

$$a_i^{cb} = C \cdot a_i$$

$$\tilde{a}_x^{cb} = a_x + a_y \varphi_z - a_z \varphi_y + \delta a_x^3$$

$$\tilde{a}_y^{cb} = a_y + a_z \varphi_x - a_x \varphi_z + \delta a_y^3$$

$$\Delta a_x = \tilde{a}_x^{cb} - a_x = a_y \varphi_z - a_z \varphi_y + \delta a_x^3$$

$$\Delta a_y = \tilde{a}_y^{cb} - a_y = a_z \varphi_x - a_x \varphi_z + \delta a_y^3$$

$$\Delta \dot{V}_x = \Delta a_x + (U \sin \varphi + \omega_z) \Delta V_y + (U \cos \varphi + \omega_y) V_y$$

$$\Delta \dot{V}_y = \Delta a_y - (U \sin \varphi + \omega_z) \Delta V_x - (U \cos \varphi + \omega_y) V_x$$

погрешности.

$$\Delta \dot{\omega}_x' = -f_z \varphi_x - f_x \varphi_z - 2(U \sin \varphi + \omega_y' \operatorname{tg} \varphi) \Delta \omega_y' + (2\omega_y' U \cos \varphi + \omega_y'^2 \sec^2 \varphi) \Delta \varphi - \frac{\delta a_x^3}{R}$$

$$\Delta \dot{\omega}_y' = -f_z \varphi_y - f_y \varphi_z - 2(U \sin \varphi + \omega_y' \operatorname{tg} \varphi) \Delta a_x' + (U \cos \varphi + \omega_x' \operatorname{tg} \varphi) \Delta \omega_y' + \frac{\delta a_y^3}{R}$$

$$f_x = \frac{a_x}{R} = \dot{\omega}_y' + (2U \sin \varphi + \omega_y' \operatorname{tg} \varphi) \omega_x'$$

$$f_y = \frac{a_y}{R} = \dot{\omega}_x'$$

$$f_z = \frac{a_z}{R} = \dots$$

$$\Delta \varphi = -\Delta \omega_x'$$

$$\Delta \lambda = \Delta \omega_y'$$

- Небольшая погрешность

Частичный

$$\varphi(t) = 0,$$

Ур-ние р

Канал

$$\dot{\varphi}_x =$$

$$\dot{\varphi}_z =$$

$$\Delta \dot{\omega}_x' =$$

$$\Delta \dot{\varphi} =$$

$$f_y = \frac{a_y}{R} = \ddot{\omega}_x' + (2U \sin \varphi + \omega_y' \operatorname{tg} \varphi) \omega_y'$$

$$f_z = \frac{a_z}{R} = -\ddot{\omega}_x' - \ddot{\omega}_y' - 2\omega_y' U \cos \varphi + U^2$$

$U^2$  - квадрат  
частоты Шупера

$$\Delta \dot{\varphi} = -\Delta \omega_x'$$

$$\Delta \dot{\lambda} = \Delta \omega_y' \sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi \Delta \varphi \cdot \omega_y'$$

• Необр. знать траекторию и ск-ть вдоль этой траект.

Частный случай для объекта, неподвижн. на экваторе.

$$\varphi(t) = 0, \quad \lambda(t) = \text{const}, \quad V_x = V_y = V_z = 0$$

Ур-ие расщепл. на 2 канала: по широте и по долготе.

Канал широты

$$\dot{\varphi}_x = U \varphi_z + \Delta \omega_{\varphi} + \delta \omega_x^3$$

$$\dot{\varphi}_z = U \varphi_x + U \Delta \varphi + \delta \omega_z^3$$

$$\Delta \ddot{\omega}_x' = -U^2 \varphi_x - \frac{\delta a_x^3}{R}$$

$$\Delta \dot{\varphi} = -\Delta \omega_x'$$

Канал долготы

$$\dot{\varphi}_y = \Delta \omega_y' + \delta \omega_y^3$$

$$\Delta \dot{\omega}_y' = -U^2 \varphi_y + \frac{\delta a_x^3}{R}$$

$$\Delta \dot{\lambda} = -\Delta \omega_y'$$

Ур-ие начал  
система

Латлас  $\rightarrow$  решение  $\rightarrow$  обратно

Канал долготы (опер. век)

$$s \varphi_y(s) - \Delta \omega_y'(s) = \varphi_y(0) + \frac{\delta \omega_y^3(s)}{s}$$

$$U^2 \varphi_y(s) + s \Delta \omega_y'(s) = \Delta \omega_y'(0) + \frac{\delta a_x^3(s)}{sR}$$

$$s \lambda(s) - \Delta \omega_y'(s) = \Delta \lambda(0)$$

$$\varphi_y(s) = \frac{s}{s^2 + U^2} \varphi_y(0) + \frac{\Delta \omega_y'(0)}{s^2 + U^2} + \frac{\delta \omega_y^3(s)}{s^2 + U^2} + \frac{\delta a_x^3(s)}{s(s^2 + U^2)R}$$

$$\Delta \omega_y'(s) = -\frac{U^2}{s^2 + U^2} \varphi_y(0) + \frac{s}{s^2 + U^2} \Delta \omega_y'(0) - \frac{U^2}{s(s^2 + U^2)} \delta \omega_y^3(s) + \frac{\delta a_x^3(s)}{(s^2 + U^2)R}$$

$$\Delta \lambda(s) = \frac{\Delta \lambda(0)}{s} - \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + U^2} \right) \varphi_y(0) + \frac{\Delta \omega_y'(0)}{s^2 + U^2} + \frac{1}{U^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + U^2} \right) \frac{\delta a_x^3(s)}{R} - \delta \omega_y^3(s) \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + U^2} \right)$$

$$Q_y(t) = Q_y(0) \cos vt + \Delta \omega_y'(0) \frac{\sin vt}{v} + \delta \omega_y''(t) \frac{\sin vt}{v} + \frac{\delta \omega_y''(t) (1 - \cos vt)}{g}$$

$$\Delta \omega_y'(t) = -Q_y(0) v \sin vt + \Delta \omega_y'(0) \cos vt - \delta \omega_y''(t) (1 - \cos vt)$$

$$\Delta \lambda(t) = \Delta \lambda(0) - Q_y(0) (1 - \cos vt) + \Delta \omega_y'(0) \frac{\sin vt}{v} + \frac{\delta \omega_y''(t)}{g} (1 - \cos vt) - \delta \omega_y''(t) (t - \frac{\sin vt}{v})$$

нарастает в теч. времени из-за эквив. гравитации

Канал широты

$$s \Phi_x(s) + U \Phi_z(s) - \Delta \omega_x'(s) = Q_x(0) + \frac{\delta \omega_x''(s)}{s}$$

$$s \Phi_z(s) - U \Phi_x(s) - U \Delta \Phi = Q_z(0) + \frac{\delta \omega_z''(s)}{s}$$

$$s \Delta \omega_x'(s) + v^2 \Phi_x(s) = \Delta \omega_x'(0) + \frac{\delta \omega_x''(s)}{sR}$$

$$s \Delta \Phi(s) + \Delta \omega_x'(s) = \Delta \Phi(0)$$

$$\frac{U}{v} \approx 6 \cdot 10^{-2} \quad \frac{U^2}{v^2} \approx 3,6 \cdot 10^{-3} \quad \text{если } t < \frac{T_{\text{ш}}}{4} \sim 21 \text{ мин, } \pi \Delta t \leq 0,1 \text{ рад} \approx 6^\circ$$

Ищем приближение

$$Q_x(t) = \delta \omega_x''(t) \frac{\sin vt}{v} + Q_x(0) \cos vt - \frac{\delta \omega_z''(t) U}{v^2} (1 - \cos vt) - Q_z(0) U \frac{\sin vt}{v} + \frac{\delta \omega_y''(t)}{g} (1 - \cos vt) + \omega_x'(0) \frac{\sin vt}{v}$$

$$Q_z(t) = \frac{\delta \omega_x''(t) U}{v^2} (1 - \cos vt) + Q_x(0) U t + \delta \omega_z''(t) t + Q_z(0) + \Delta \Phi(0) U t - \frac{\delta \omega_y''(t) U}{g}$$

$$\Delta \omega_x'(t) = -\delta \omega_x''(t) (1 - \cos vt) - Q_x(0) v \sin vt + \delta \omega_z''(t) U (t - \frac{\sin vt}{v}) + Q_z(0) U (1 - \cos vt) + \frac{\delta \omega_y''(t)}{g} \frac{\sin vt}{v} + \Delta \omega_x'(0) \cos vt + \Delta \Phi(0) U (t - \frac{\sin vt}{v})$$

$$\Delta \Phi(t) = -\delta \omega_x''(t) (t - \frac{\sin vt}{v}) + Q_x(0) (1 - \cos vt) - \delta \omega_z''(t) U (\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos vt}{v^2}) - Q_z(0) U (t - \frac{\sin vt}{v}) - \frac{\delta \omega_y''(t)}{g} (1 - \cos vt) - \Delta \omega_x'(0) \frac{\sin vt}{v} + \Delta \Phi(0)$$

Отчет по лабам на полу  
наш учеб. лабы (ф.у.ш. и т.д.)  
широты и осей брать из реал. сист.  
Лабор. и данные 15 Тш  
Фрейгз погрешности  
супралинии

# Обоснование требований к вольту

27.01.22

Лекция 17

- Решение упр-ий ошибка м/о использовать для

Полагаем, что вх. погр-ты носят стур. харр и независ. друг от друга.

$$\Delta X^{\Sigma} = \Delta \lambda R \cos \varphi$$

$$\Delta Y^{\Sigma} = \Delta \varphi R \rightarrow \text{всех погр-т}$$

$$\Delta X^{\Sigma} (\Delta Y^{\Sigma}) = \sigma = \sum_i^N \sigma_i$$

$$D_{\Delta \varphi(t) [\Delta \lambda(t)]}^{\Sigma} = \sum_{i=1}^N a_i^2 D_{x_i} \Rightarrow N a_i^2 D_{x_i} = D^{\Sigma} \rightarrow \text{также при уср. независ.}$$

$$N=5 \text{ или } N=7$$

$$\sigma_{\Delta \varphi(t)}^2 = \sqrt{N} a_i \cdot \sigma_i$$

$$\sigma_{x_i} = \frac{\sigma^{\Sigma}}{\sqrt{N} \cdot a_i}$$

Ошибка опред. перод. местополож. Зми за 1 раз

• Треб. к вост. точности.

$$\sigma^{\Sigma} = 3 \cdot 10^3 \text{ м}$$

$$t = \frac{3}{4} T_{\omega}; N=7$$

$$a_i = \left( t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) R$$

$$\sigma_{\omega x} = \frac{3 \cdot 10^3}{\sqrt{7} \cdot \left( \frac{3}{4} T_{\omega} - \frac{\sin \frac{2\pi \cdot \frac{3}{4} T_{\omega}}{T_{\omega}}}{\frac{2\pi}{T_{\omega}}} \right)} = 0,0089 \% \text{ рас}$$

# Выставка ИНС

КЦМА 18 • Подготов. этап работы ИНС

- Подготов. этап работы ИНС
- Подготов. этап работы ИНС
- Перед выставкой сист. наход. в преув. помех. Необр. либо друг. выстав. оси сист. по осем баз. Трёхгран. либо пробно опред. уш. помех. всей прибор. с.к. отн-но географ. с.к. (чаще всего ист-се)
- Для осущ. выставки необр. знание о 2-х некем. в-рах разд. приращеод - вектор ускор. силы Тяж. и вектор скорости враще. Земли.
- Выставка:
  - 1) геометрическая - отн. совмещ. осей платф. с географ. с.к.
  - 2) аналитическая - опред. взаим. ориентац. 2-х сист. коорд.

## Условия выставки:

- 1) выставка на неподв. осн-и (на Земле)
- 2) выставка на подвиж. осн-и.

## Выставка:

- 1) автономная - только показ. Ч.Э., наход. на платф.
- 2) неавтономная - с исп-м сигналов от внеш. ист-в инф-ии.

Будем рассм. автономную выставку на неподв. осн-и.

## Этапы выставки

Горизонтирование [выставка в горизонт] - свеем к осм  $P_x$  и  $P_y$

самолет. сист. - 10'... 15' → время свеем. 30... 60-сек.

ракет. сист. ~ ед. уш. сек

выставка в азимут.

## Горизонт

1) Ускоренная - гироскоп. Точность

Перед запуском Задать - за гироскоп. и/или достигн. с подав. на ушлов с поворот. рама и с Ру

Далее

2) Точная

↑  $U_p$

$X_{св} Y_{св} Z_{св}$

Отклон. от рассм.

$\cos \varphi$

$\sin \varphi$

$X Y$

чел

11.05.22.

## Выставка ИНС.

### ЛЕКЦИЯ 18 • Второй этап работы ИНС

- Код выстав. будем помим. опред. наг. ориентации относительно базов. трехгранника
- Перед выставкой сист. наход. в презв. помощи. Необр. либо географ. сист. по всем баз. трехгран. либо географ. сист. (чаще всего ист-се)
- Для осущ. выставки необр. знание о 2-х некемим. в рах рац. дин. природы - вектор ускор. силы тяг. и вектор скорости суточ. вращ. Земли.
- Выставка:
  - 1) геометрическая - дин. совмещ. осей матр. с географ. сист.
  - 2) аналитическая - опред. взаим. ориентации 2-х сист. коорд.
- Условия выставки:
  - 1) выставка на неподв. осн-и (на Земле)
  - 2) выставка на подвиж. осн-и.
- Типы выставки:
  - 1) автономная - только показ. Ч.Э., наход. на матр.
  - 2) неавтономная - с исп-м сигналов от внеш. ис-в интр-ии.
- ~ Будем рассм. автономную выставку на неподв. осн-и.

### Этапы выставки

1. Горизонтирование [выставка в горизонт] - свести к мин.  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  самост. сист. -  $10' \dots 15'$  → время выст. 30...60 мин. ракет. сист. ~ ед. угл. сек
2. Выставка в азимут.

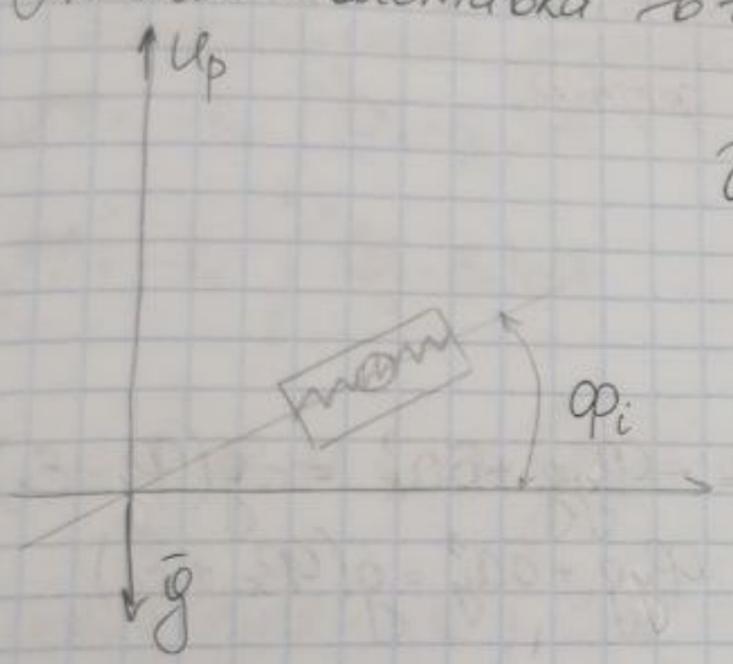
# Горизонтирование

1) Ускоренная выставка в горизонт  
 • гириблоки не запускаются, т.к. выстр. выставка не производится  
 • точность до 50, *время 35 сек*, *1 мин*

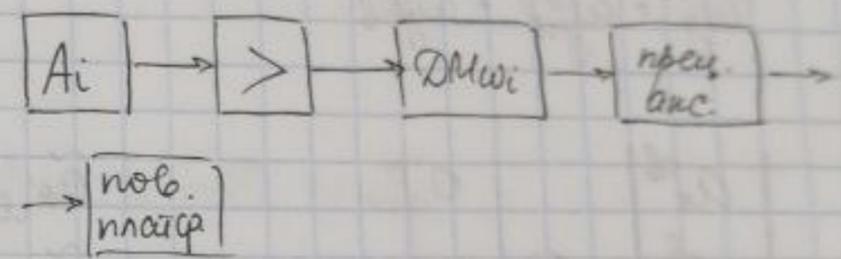
Перед запуском платф. шфт наход. в прив. поим. Задана - за мин. время прив. в гориз. поим. Гироскопы не запускаются. В сост. вход. датчики поим. и шфт. акс-ов, усилитель и шфт. стаби. для достиж. оптич. перех. прив. с сигнала с акс-ов, подав. на дв. стаби.  $\Sigma$  с сигнала прив. от датчиков поим. (ФУ на рамах) *Синхронизация* с поворот. платф. прив. обну. гироскопы, когда рама и гириблок прив. в поим., при кот. сигнал с ФУ гирос-а миним.

Далее прив. запуск гириметров.

2) Точная выставка в горизонт.



$$\tilde{a}_i = g \sin \varphi_i + \delta a_i^3$$



$$0 = g \sin \varphi_i + \delta a_i^3 \rightarrow \text{процессе прив.}$$

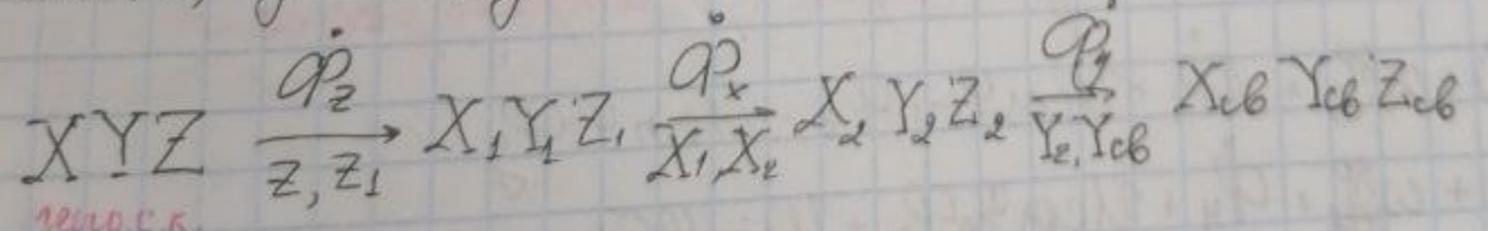
$$\varphi_i = \frac{\delta a_i^3}{g} \text{ - точность выставки (предельная)}$$

$X_{св} Y_{св} Z_{св}$  - связ. с платф.

Отклон. осей чувств. Ч.Э. не рассм.

$$\cos \varphi_x, \varphi_y \approx 1$$

$$\sin \varphi_x, \varphi_y \approx \varphi_x, \varphi_y$$



$$C = C_{\varphi_y} C_{\varphi_x} C_{\varphi_z}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \varphi_z & \sin \varphi_z & -\varphi_y \\ -\sin \varphi_z & \cos \varphi_z & \varphi_x \\ \varphi_y \cos \varphi_z + \varphi_x \sin \varphi_z & \varphi_y \sin \varphi_z - \varphi_x \cos \varphi_z & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_m = U + (\dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z)$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ U \cos \varphi \\ U \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\bar{\omega}_m = C \begin{pmatrix} 0 \\ U \cos \varphi \\ U \sin \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{pmatrix}$$

→ основное уравнение выставляем

→ связь между плавф.

$$\begin{cases} \omega_x^{cb} = \dot{\varphi}_x + U \cos \varphi \sin \varphi_z - U \sin \varphi \varphi_y \\ \omega_y^{cb} = \dot{\varphi}_y + U \cos \varphi \cos \varphi_z + U \sin \varphi \varphi_x \\ \omega_z^{cb} = \dot{\varphi}_z + U \cos \varphi \varphi_y \sin \varphi_z - U \cos \varphi \varphi_x \cos \varphi_z + U \sin \varphi \end{cases}$$

→ в эти ур-е выставляем в скаляр. форме.

$$\omega_x^{cb} = \omega_{xcb}^{yup} + \omega_{xcb}^{gp}$$

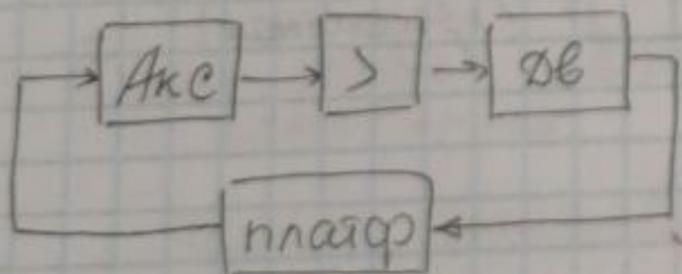
$$\omega_y^{cb} = \omega_{ycb}^{yup} + \omega_{ycb}^{gp}$$

$$\begin{pmatrix} a_x^{cb} \\ a_y^{cb} \\ a_z^{cb} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{xcb} = -\varphi_y g + \delta a_x^{\vec{}} = -g(\varphi_y - E_x)$$

$$\tilde{a}_{ycb} = \varphi_x g + \delta a_y^{\vec{}} = g(\varphi_x + E_y)$$

$E_x, E_y$  - безразм. эквив. силы. нуль осей



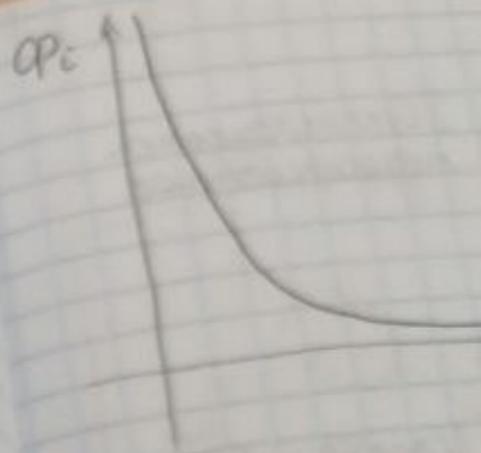
$$\omega_x^{yup} = -K_{пор} \tilde{a}_y^{cb} = -K_r g (\varphi_x + E_y) = K_r (\varphi_x + E_y)$$

$$\omega_y^{yup} = +K_{пор} \tilde{a}_x^{cb} = -K_r g (\varphi_y - E_x) = -K_r (\varphi_y - E_x)$$

→ посыл. управ. с операцией усилени

$$\left\{ \begin{aligned} -K_r (\varphi_x + E_y) + \omega_{xcb}^{gp} &= \dot{\varphi}_x + U \cos \varphi \sin \varphi_z - U \sin \varphi \varphi_y \\ K_r (\varphi_y - E_x) + \omega_{ycb}^{gp} &= \dot{\varphi}_y + U \cos \varphi \cos \varphi_z + U \sin \varphi \varphi_x \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\varphi}_x + K_r \varphi_x &= -U \cos \varphi \sin \varphi_z + U \sin \varphi \varphi_y - K_r E_y + \omega_{xcb}^{gp} \\ \ddot{\varphi}_y + K_r \varphi_y &= -U \cos \varphi \cos \varphi_z - U \sin \varphi \varphi_x - K_r E_x + \omega_{ycb}^{gp} \end{aligned} \right.$$



$$\varphi_y^* = -E_x -$$

• Функция безразм. силы

Умно

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_x^{yup} &= - \\ \omega_y^{yup} &= - \end{aligned} \right.$$

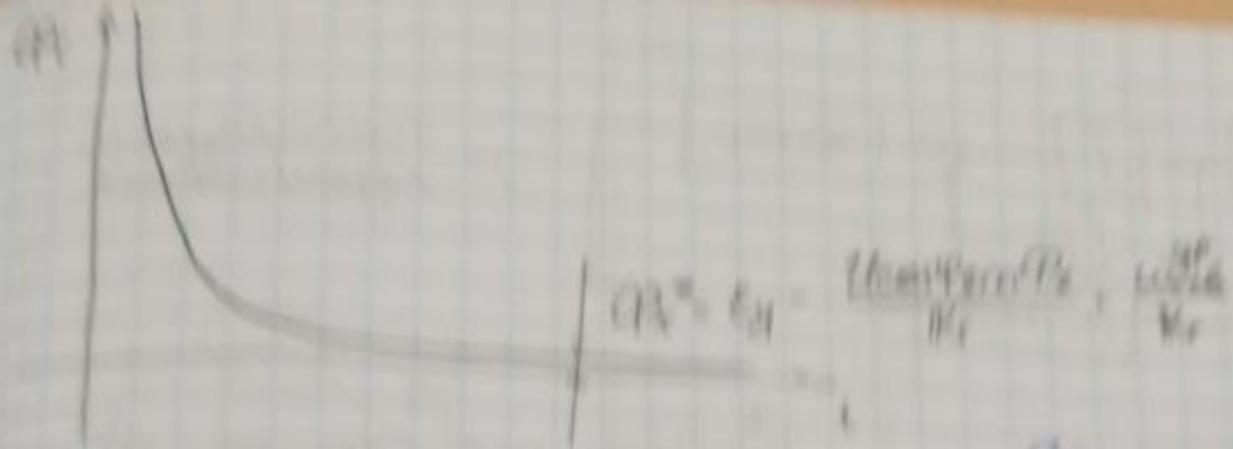
$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\varphi}_x + K_r \\ \ddot{\varphi}_y + K_r \end{aligned} \right.$$

Про

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{aligned} \right.$$

$\varphi_x, \varphi_y$

$E_x, E_y$



$$Q_y^* = -E_x = \frac{U \cos^2 \phi_0}{K_r}, \quad \omega_{\text{eff}}^2$$

Полная скорость  
на  $\omega$  и  $\omega_{\text{eff}}$  вычисляется  
в этот момент времени  
будет, если  $\omega_{\text{eff}} = \omega$ .

Второе уравнение в системе для  $Q_y$  не только  
связано с  $Q_x$ , но и с  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\omega$ ,  $\omega_{\text{eff}}$   
и  $\phi_0$ .

Умноженное уравнение

$$\int \dot{Q}_x^{\text{уп}} = -K_r \int (Q_x + E_y) dt$$

$$\int \dot{Q}_y^{\text{уп}} = -K_r \int (Q_y - E_x) dt$$

$$\int \dot{Q}_x + K_r \int Q_x dt = -K_r \int E_y dt = U \cos^2 \phi_0 \sin \phi_0 + \omega_{\text{eff}}^2$$

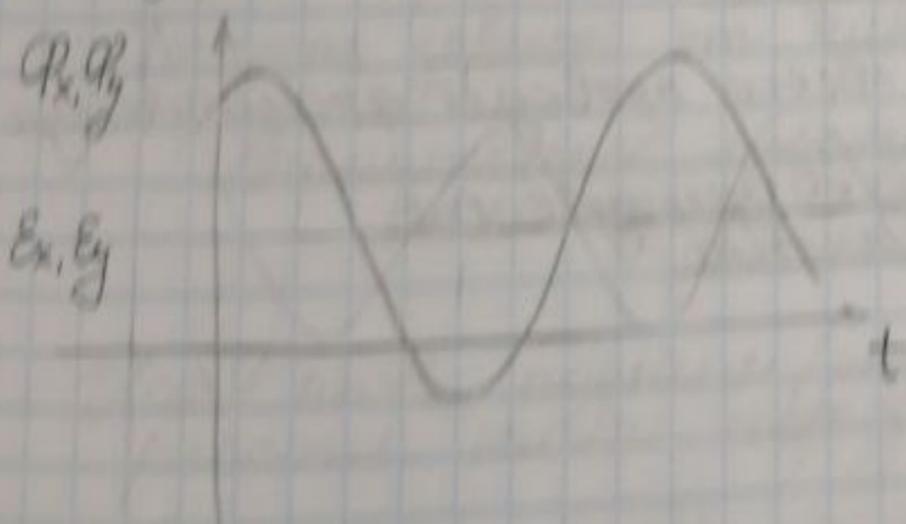
$$\int \dot{Q}_y + K_r \int Q_y dt = -K_r \int E_x dt = U \cos^2 \phi_0 \cos \phi_0 + \omega_{\text{eff}}^2$$

Продифференцируем все уравнения, при этом  $\omega_{\text{eff}}^2$ ,  $E_x = \text{const}$

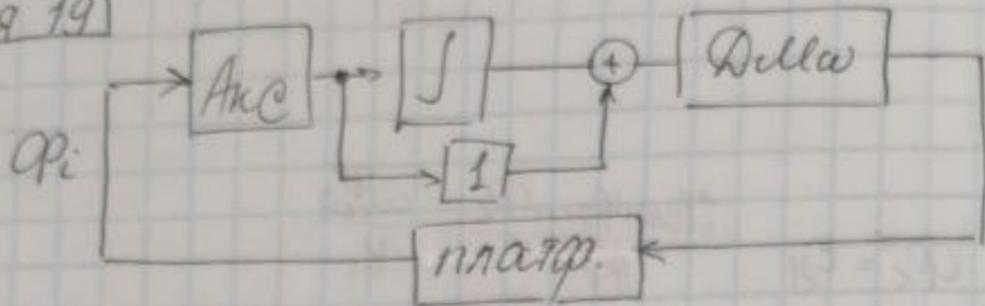
$$\int \ddot{Q}_x + K_r Q_x = -K_r E_y$$

$$\int \ddot{Q}_y + K_r Q_y = -K_r E_x$$

*→ отрицательное, если  $\cos \phi_0 < 0$   
положительное, если  $\cos \phi_0 > 0$   
и наоборот, если  $\sin \phi_0 < 0$   
и наоборот, если  $\sin \phi_0 > 0$*



Лекция 19



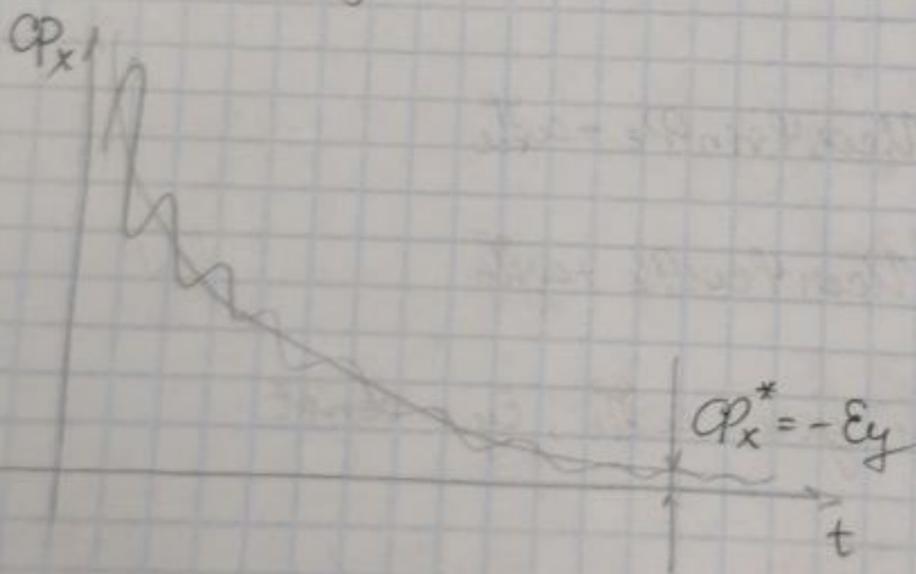
Интегральная  
позиционка

$$\ddot{\varphi}_x + K_r \int_0^t \varphi_x dt + K_r \varphi_x = -K_r \int_0^t E_y dt - K_r E_y - U \cos \varphi \sin \varphi_2$$

$$\ddot{\varphi}_y + K_r \int_0^t \varphi_y dt + K_r \varphi_y = -K_r \int_0^t E_x dt - K_r E_x - U \cos \varphi \cos \varphi_2 + \omega_y^2$$

$$E_y, E_x = \text{const}, \omega_x^2, \omega_y^2 = \text{const}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_x + K_r \dot{\varphi}_x + K_r \varphi_x = -K_r E_y \\ \ddot{\varphi}_y + K_r \dot{\varphi}_y + K_r \varphi_y = -K_r E_x \end{cases}$$



Плоская выставка в горизонт

Выставка в азимут

- Выставку в азимут чаще всего проводит аналитическую
- Аналитическая выставка в азимуте по сигналам с гироскопа



отклон. от м-ти гориз. (необходимо трехстепен. гироскоп. измерение)  
 В век-ге на север. Дале-е  $A_y$  не вли-ет  
 собой. отклон. пилотр. от м-ти гориз.

$$\dot{\varphi}_x + U \cos \varphi \sin \varphi_z = \frac{K_{\text{ком}} \cdot i_{\text{гир}}}{H} + \delta \omega_x^z$$

В уст. реж.  $\dot{\varphi}_x = 0$

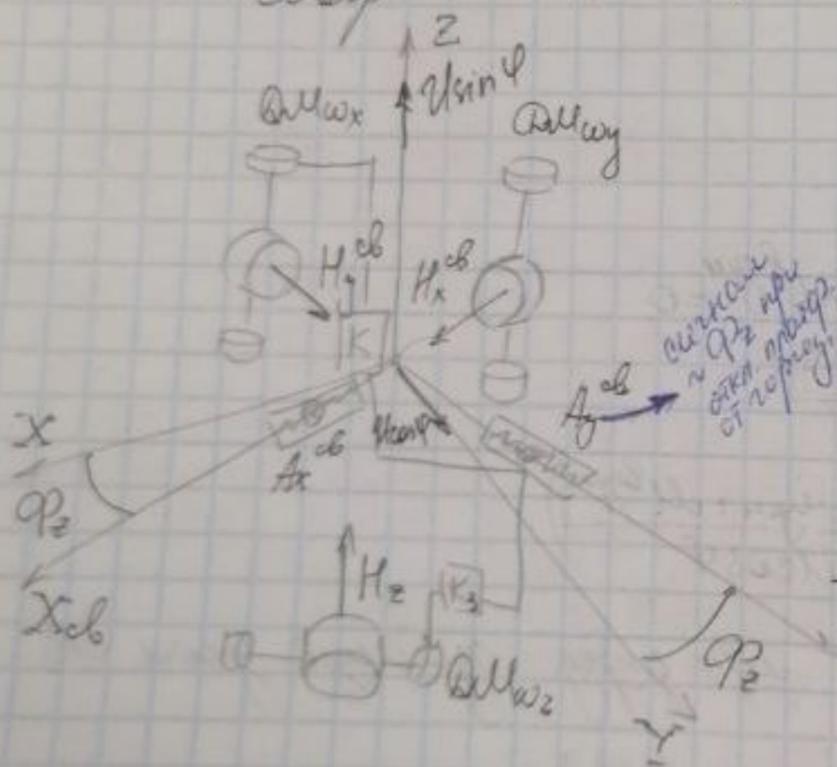
$$\varphi_z = \arcsin \left( \frac{K_{\text{ком}} \cdot i_{\text{гир}}}{H U \cos \varphi} + \frac{\delta \omega_x^z}{U \cos \varphi} \right)$$

18.05.22

### Цифровая выставка в азимут.

ЛЕКЦИЯ 20

Предполог. гир. е привез. одной из осей св-е  
к оси  $Y$ , напр. вдоль гор. меридиана к  
север



$\varphi_z$  - азим. угол  
 $Z_{cb}$  - истин. верт.

$$U_x = 0, U_y = U \cos \varphi, U_z = U \sin \varphi$$

$$U_x^{cb} = U \cos \varphi \sin \varphi_z$$

Ял-ть гориз. накл.  
 подним. конусов  
 $H_z^{cb} \rightarrow$  м. ось  $Z$   
 гироскопа отклон.  
 от м-ти гориз.  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  повор. осн.  
 $\rightarrow$  сигнал. с  $A_y^{cb} \rightarrow$   
 на  $\omega_{\text{гир}}^z$ .  $H_z^{cb} \approx \frac{K_3}{2} Z_{cb}$   
 процесс.

Для обесп. захв. сигнала с  $A_y^{cb}$   $\rightarrow Y_{cb}$  совмещ. с  $Y$   
 глам.  $\frac{K_3}{2} X_{cb} \downarrow \varphi_x$   $\frac{K_3}{2} K_3$  на  $\omega_{\text{гир}}^x \rightarrow$  процесс.

$$U \sin \varphi_z = 0; U \sin \varphi \varphi_y = 0; \sin \varphi_z \approx \varphi_z, \cos \varphi_z \approx 1.$$

$$U \cos \varphi \varphi_y \sin \varphi_z = 0, U \cos \varphi \varphi_x \cos \varphi_z = 0$$

### Осн. угр. выставки

$$\dot{\varphi}_x + U \cos \varphi \varphi_z = \omega_{\text{гир}}^x + \omega_x^{\text{возм}}$$

$$\dot{\varphi}_z + U \sin \varphi = \omega_{\text{гир}}^z + \omega_z^{\text{возм}}$$

$$\omega_{\text{гир}}^x = -K_3 (\varphi_x + E_y^{cb})$$

$$\omega_{\text{гир}}^z = K_3 A_y^{cb} + U \sin \varphi =$$

$$= K_3 (\varphi_x + E_y^{cb}) + U \sin \varphi$$

Триггер  
 безматриц.  
 навигации

• Оси Ч.З. ориент.  
 ~ Двухсторон. угр.  
 ~ Равнопропорционн.

$$E_y^{cb} = \text{const}, \omega_{\text{гир}}^z = \text{const}$$

$$\dot{\varphi}_x = \text{const}, \varphi = \text{const}$$

$$\dot{\varphi}_z = \frac{1}{K_3} \dot{\varphi}_z - E_y^{cb}$$

$$\dot{\varphi}_x = \frac{1}{K_3} \dot{\varphi}_z$$

$$\ddot{\varphi}_z + K_3 \dot{\varphi}_z + K_3 U \cos \varphi =$$

$$= K_3 \omega_{\text{гир}}^z + K_3 \omega_z^{\text{возм}}$$

В уст. реж.  $\dot{\varphi}_z =$

Сигн. поур-го  
 ориентации

$$\dot{\varphi}_z = \frac{1}{U \cos \varphi} \omega_z^{\text{возм}}$$

• Обратн. на  
 не подат

Дале МЭ  
 на шир.  
 неизм. н  
 погрешн

$$V_E = \int_0^T (a_E)$$

$$V_N = \int_0^T (a_N)$$

$$\omega_E, \omega_N$$

Принципы построения  
двухстепенных инерциальных  
матрицальных систем

- Оси Ч.Э. ориент. по осям связи.
- Дифференц. урав. в возм. Ч.Э. - урав. вращ. тела у ИМС.
- Выбор принципов → одно из самых трудных уса

~ Оси классы: микромеханика и оптические гироскопы (регно - ФНГ)

Состав: ~ 3 ФУСа + 3 Акс-а

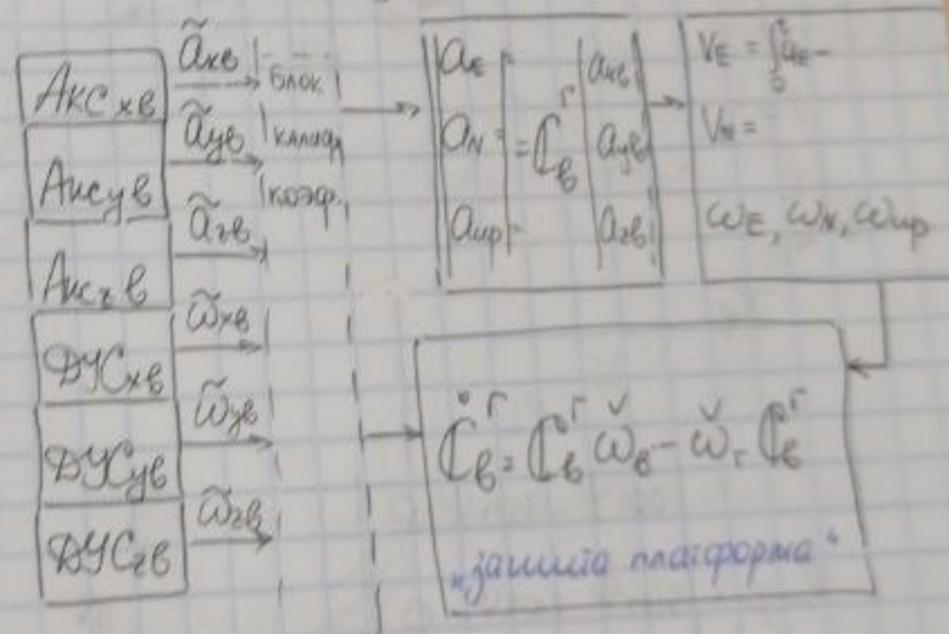
~ 6 акс-ов → подумать, как реализовать

Алгоритмы ориент. для ИИ и ИИМС (опт. по массам, стоимости)

Алгоритмы для 3 ФУС-а + 3 Акс-а

X<sub>в</sub> Y<sub>в</sub> Z<sub>в</sub> - body, XYZ (ENU)<sub>p</sub> - репр.

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_y^{cb} = const, \omega_{cb}^{cb} = const \\ \dot{\varphi}_x = const, \varphi = const \\ \dot{\varphi}_x = \frac{1}{K_3} \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_y^{cb} - \frac{\omega_{cb}^{cb} \varphi_{y_{гир}}}{K_3} \\ \dot{\varphi}_x = \frac{1}{K_3} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 + K_r \dot{\varphi}_2 + K_3 U \cos \varphi \varphi_2 = \\ = K_3 \omega_{x_{гир}}^{cb} + K_r \omega_{y_{гир}}^{cb} \\ \text{Вмест. репр. } \varphi_2 = \varphi_2 = 0 \\ \text{Сист. поур-то осей ориентир.} \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{U \cos \varphi} \omega_{x_{гир}}^{cb} + \frac{K_r \omega_{y_{гир}}^{cb}}{K_3 U \cos \varphi} \end{aligned}$$



• Обратнo на Ч.Э. сигналы не подаются.

Для ИИМС г/б блок камбр. котвр. → опрег. нелюб. потр. в меделях погрешностей Ч.Э.

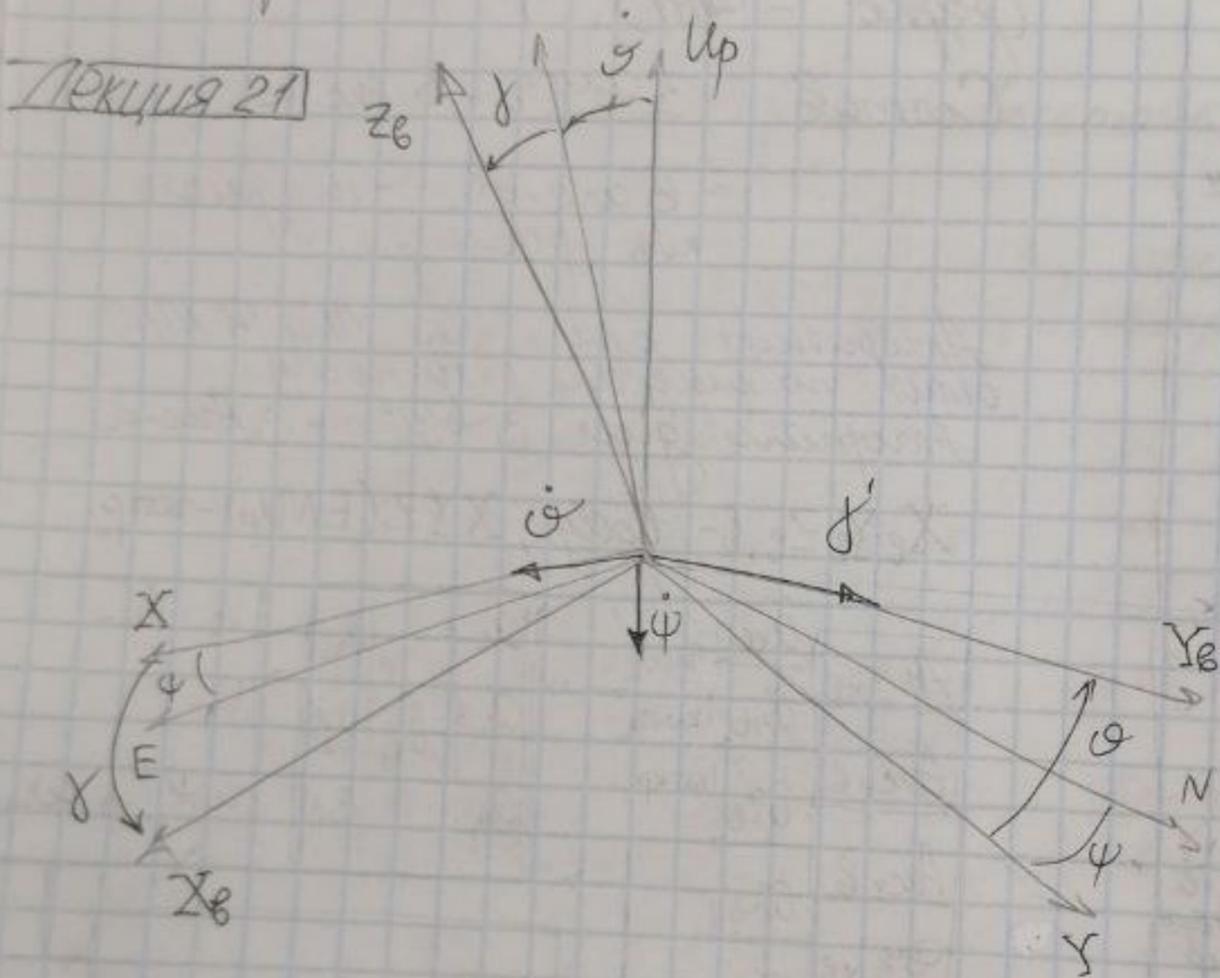
$$\begin{aligned} V_E = \int_0^t (a_E - (\omega_N + U \cos \varphi) V_{up} + (\omega_{up} + U \sin \varphi) V_N) dt \\ V_N = \int_0^t (a_N - (\omega_{up} + U \sin \varphi) V_E + \omega_E V_{up}) dt \\ \omega_E, \omega_N, \omega_{up} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \varphi = \int \frac{V_N}{R_\varphi} dt \\ \lambda = \int \frac{V_E}{R_\lambda \cos \varphi} dt \end{aligned}$$

$$\omega_B^v = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{zB} & \omega_{yB} \\ \omega_{zB} & 0 & -\omega_{xB} \\ -\omega_{yB} & \omega_{xB} & 0 \end{vmatrix}; \quad \omega_r^v = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{up} & \omega_N \\ \omega_{up} & 0 & -\omega_E \\ -\omega_N & \omega_E & 0 \end{vmatrix}$$

$$\omega_E = -\frac{V_N}{R_\varphi}; \quad \omega_N = U \cos \varphi + \frac{V_E}{R_\lambda}; \quad \omega_{up} = U \sin \varphi + \frac{V_E}{R_\lambda} \tan \varphi$$

• При исп. полев. и св. с.к. info говорить об опред. углов ориент. объекта.

Матрица  $C_r^B$



$$C_\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_\delta = \begin{vmatrix} \cos \delta & 0 & -\sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{vmatrix}$$

$$C_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix}$$

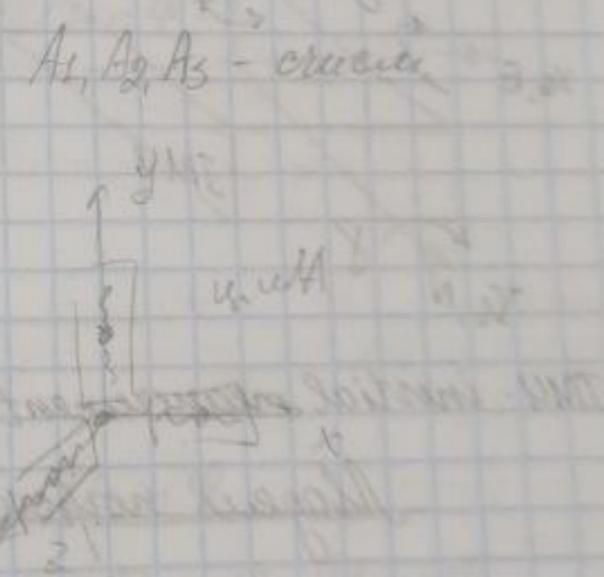
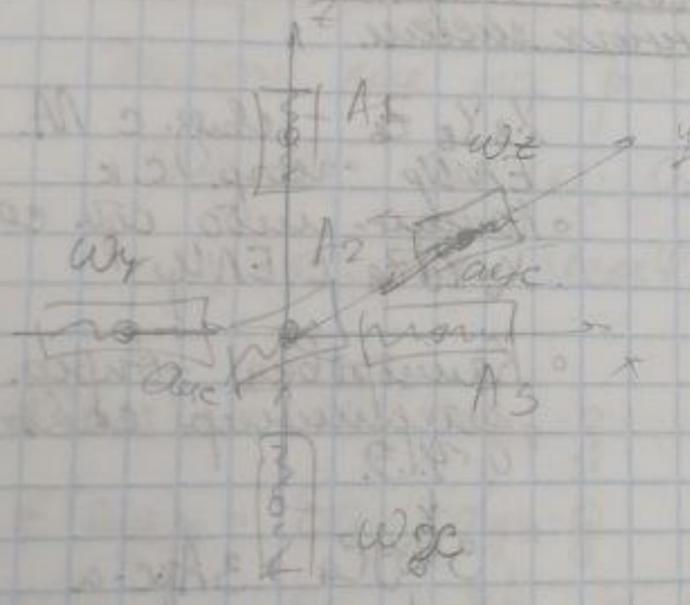
$$C_{AB} = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\vartheta + \sin\psi \sin\vartheta \sin\delta & \sin\psi \cos\vartheta & \cos\psi \sin\delta - \sin\psi \sin\delta \cos\vartheta \\ -\sin\psi \cos\vartheta + \cos\psi \sin\vartheta \sin\delta & \cos\psi \cos\vartheta & \sin\psi \sin\delta - \cos\psi \sin\delta \cos\vartheta \\ -\cos\vartheta \sin\delta & \sin\vartheta & \cos\vartheta \cos\delta \end{pmatrix}$$

$$\psi = \arctg \frac{C_{12}}{C_{22}}$$

$$\delta = -\arctg \frac{C_{31}}{C_{33}}$$

$$\vartheta = \arctg \frac{C_{32}}{\sqrt{C_{31}^2 + C_{33}^2}}$$

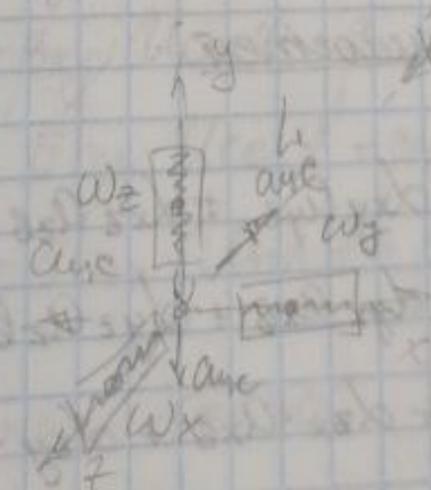
- Стречи виртуал. платф.
- Алгоритм ориентации полметра.
- Маг. аппарат для всех с.к.



19.05.22

ЛЕКЦИЯ 22

• Но 3-й курс  
что будет  
проект по прибору  
или по  
системе





• Возм-ть опред. коэф. в моделях погр-тей (1) и (2) полев. в сист. устан. ед (сист.) на поворотах. стоп с послед. разворотом на радиус. угла по отно к 2-м векторам:  $\vec{g}$  и  $\vec{U}$ , при уст., что ускор сист. движется уст. скор. этот вращ. Земли

ориент. осей связ сист. коэф. сохр. по отно к извест. опорн. сист. коэф.

• Связь 2 сп-ба калибровки:

- 1) калибровка по сырым данным (raw data) - данные непосред. с всех Ч.Э.: гироскопов и акс-ов.
- 2) калибровка в решении навигации (т.е. калибр. прил. БИНС) - по всех пар-рам, измер. БИНС.

Калибровка по сырым данным

①  $t=0$ : Полюс. как на рис.

$$a_{xb} = 0; a_{yb} = 0; a_{zb} = +g; \quad Z(x_b) - \text{измер. Ч.Э.}$$

$$\omega_{xb} = 0; \omega_{yb} = U \cos \varphi; \omega_{zb} = U \sin \varphi;$$

$$(1) \begin{cases} Z(a_{xb})_0 = \delta a_x + \delta x_z \cdot g \\ Z(a_{yb})_0 = \delta a_y + \delta y_z \cdot g \\ Z(a_{zb})_0 = \delta a_z + \delta h_{za} \cdot g + g \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} Z(\omega_{xb})_0 = \delta \omega_x + \beta_{xy} \cdot U \cos \varphi + \beta_{xz} \cdot U \sin \varphi \\ Z(\omega_{yb})_0 = \delta \omega_y + \delta h_{yr} \cdot U \cos \varphi + \beta_{yz} \cdot U \sin \varphi + U \cos \varphi \\ Z(\omega_{zb})_0 = \delta \omega_z + \delta h_{zr} \cdot U \sin \varphi + \beta_{zy} \cdot U \cos \varphi + U \sin \varphi \end{cases}$$

② Развернем  $\vec{h}$   $\gamma$  на  $\gamma = +90^\circ$

$$X_b = -U_p, \quad Y_b = N, \quad Z_b = E$$

$$a_{xb} = -g; \quad a_{yb} = 0; \quad a_{zb} = 0;$$

$$\omega_x = -U \sin \varphi; \quad \omega_{yb} = U \cos \varphi; \quad \omega_{zb} = 0.$$

$$(1) \begin{cases} Z(a_{x6})_{\gamma=90^\circ} = \delta a_x - \delta h_{xa} \cdot g - g \\ Z(a_{y6})_{\gamma=90^\circ} = \delta a_y - d_{yx} \cdot g \\ Z(a_{z6})_{\gamma=90^\circ} = \delta a_z - d_{zx} \cdot g \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} Z(\omega_{x6})_{\gamma=90^\circ} = \delta \omega_x - \delta h_{xr} \cdot U \sin \varphi + \beta_{xy} \cdot U \cos \varphi - U \sin \varphi \\ Z(\omega_{y6})_{\gamma=90^\circ} = \delta \omega_y + \delta h_{yr} \cdot U \cos \varphi - \beta_{yx} \cdot U \sin \varphi + U \cos \varphi \\ Z(\omega_{z6})_{\gamma=90^\circ} = \delta \omega_z - \beta_{zx} \cdot U \sin \varphi + \beta_{zy} \cdot U \cos \varphi \end{cases}$$

• Определ. чисел  $A_x$  и нест. МК, и собств. частот.

Для  $A_x$  нулев. и  $\omega_x$ .

$$Z(a_{x6})_{\gamma=90^\circ} = \delta a_x - \delta h_{xa} \cdot g - g$$

$$Z(\omega_{x6})_{\gamma=90^\circ} = \delta \omega_x - \delta h_{xr} \cdot U \sin \varphi + \beta_{xy} \cdot U \cos \varphi - U \sin \varphi$$

$$\gamma = -90^\circ \quad X_6 = U_p; \quad Y_6 = N; \quad Z_6 = -E$$

$$a_{x6} = g; \quad a_{y6} = 0; \quad a_{z6} = 0$$

$$\omega_{x6} = U \sin \varphi; \quad \omega_{y6} = U \cos \varphi; \quad \omega_{z6} = 0$$

$$Z(a_{x6})_{\gamma=-90^\circ} = \delta a_x + \delta h_{xa} \cdot g + g$$

$$Z(\omega_{x6})_{\gamma=-90^\circ} = \delta \omega_x + \delta h_{xr} \cdot U \sin \varphi + \beta_{xy} \cdot U \cos \varphi + U \sin \varphi$$

$\lambda$ -оценка

$$\delta a_x^{\wedge} = \frac{Z(a_{x6})_{\gamma=90^\circ} + Z(a_{x6})_{\gamma=-90^\circ}}{2}$$

$$\delta h_{xa}^{\wedge} = \frac{Z(a_{x6})_{\gamma=-90^\circ} - Z(a_{x6})_{\gamma=90^\circ} - 2g}{2g}$$

Для проскана нулевой измер.  $\gamma=180^\circ; \varphi=180^\circ$

$$\gamma=180^\circ, \quad X_6 = -E, \quad Y_6 = N; \quad Z_6 = -U_p$$

$$\omega_{x6} = 0; \quad \omega_{y6} = U \cos \varphi; \quad \omega_{z6} = -U \sin \varphi$$

$$Z(\omega_{x6})_{\gamma=180^\circ} = \delta \omega_x + \beta_{xy} \cdot U \cos \varphi - \beta_{xz} \cdot U \sin \varphi$$

$\psi = 180^\circ$ ,  $X_0 = -E$ ,  $Y_0 = -N$ ,  $Z_0 = U_p$   
 (из нуп.)

$$Z(\omega_{x0})_{\psi=180^\circ} = \delta\omega_x - \beta_{xy} U \cos \psi + \beta_{xz} U \sin \psi$$

$$\delta\hat{\omega}_x = \frac{Z(\omega_{x0})_{\psi=0^\circ} + Z(\omega_{x0})_{\psi=180^\circ}}{2}$$

- Точность завис. от точности ориент. ИЛИ (БЧЭ) относительно стелы. (огу. с.к.)
- Калибровка акс-ов приемл., т.к.  $\beta$  - больше.
- Калибровка гирос-ов либо плохой, т.к.  $U$  мало
- Точность калибр. завис. от ур-тия "эталонон." сигнала. (нашинал.)
- Точность калибр. по raw data от завис. от ур-тия шума в вох. сигнале.

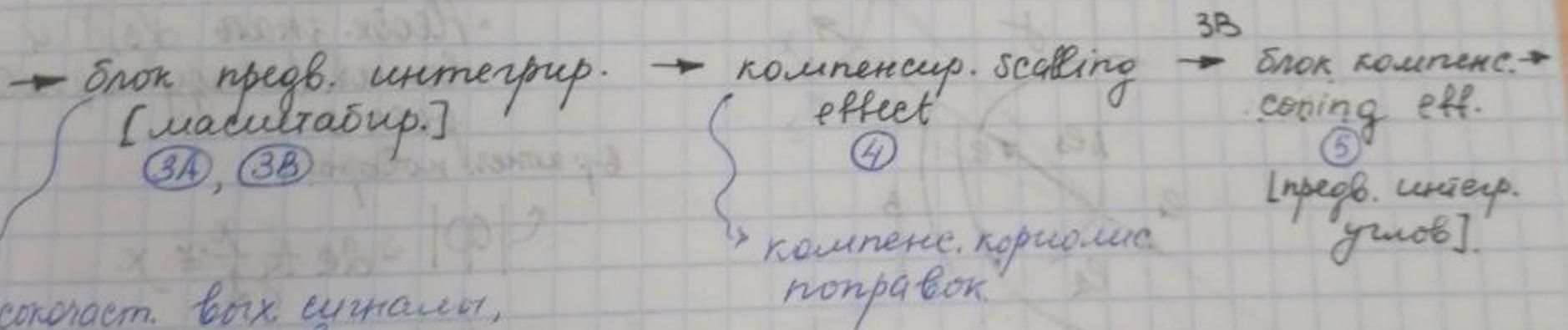
Для гирос-ов вышело  $U$  исп-ть ск-ть поворот стелы.

### Алгоритм БЛИНС

Лекция 24

Алгоритм для МЭИС не высокой точности.

Raw data  $\rightarrow$  блоки калибровки ошибок  $\rightarrow$   
 ① [компенсации погрешн. Ч.Э.]  
 ②А, ②В



т.к. высокая частота вох. сигналы, то  $\downarrow$  частоту вох. сигналов навиг. решения!

- "Прав. часть" алгоритма: 2А, 3А, 4, 10, 11, 12 - навигационный алгоритм
- "Лев. часть" алгоритма: 2В, 3В, 5, 6, 7, 8, 9 - алгоритм ориентации

$\rightarrow$  Тереслет в навиг. с.к.  
 ⑩

⑥, ⑦ → блоки кватернион. волниси.

нат. с.к. → компл. с.к.  
 плоск. поворот на  $x$   
 в  $1/2$  оси  
 Эйлера

Ось Эйлера однозначн. опред. взаимн. сист. коорд.  
 кватернион задает положе. оси Эйлера в пр-ве  
 $Re + Im_1 + Im_2 + Im_3$

- ⑥ - опред. нупр. матриц.
- ⑦ - упр-й корр. сигнал., под-й на матриц. } коорд. сист. координат.

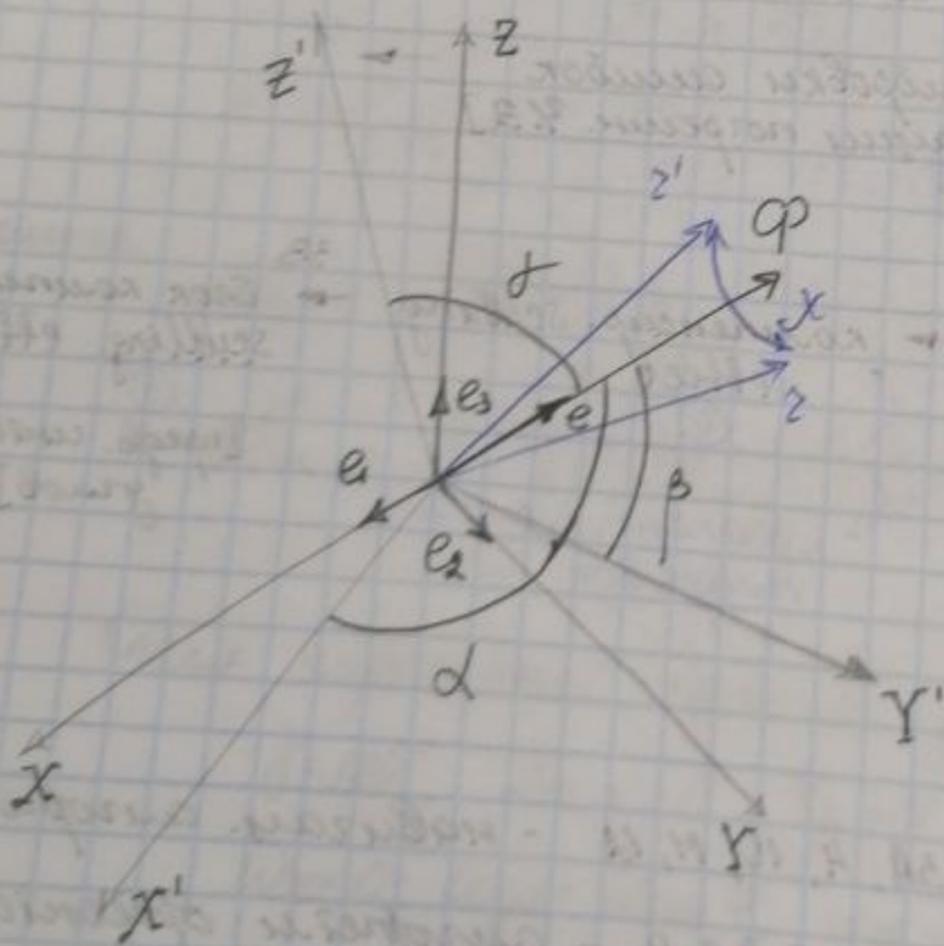
Для  $M$  не нулимы блоки  $aA, aB,$  и ифв встановное сдвигать на матрицах.

26.05.22

Лекция 25

Алгоритм БИНС.

Основы алгебры кватернионов.



$\varphi$  - ось Эйлера

$e$  - орты оси Эйлера

• Необх. знать  $\alpha, \beta, \gamma$  и велич. (модуль) поворота  $x$ .

в ринков. поворота

$$|\varphi| = 2e \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cong x$$

• при мал.  $x$  модуль плоск. поворота равен самому повороту.

$$\bar{\varphi} = \varphi_x \bar{e}_1 + \varphi_y \bar{e}_2 + \varphi_z \bar{e}_3$$

$$\varphi_x = 2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \cdot \cos \alpha; \quad \varphi_y = 2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \cdot \cos \beta; \quad \varphi_z = 2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \cdot \cos \delta$$

$$\bar{e} = \bar{e}_1 \cos \alpha + \bar{e}_2 \cos \beta + \bar{e}_3 \cos \delta$$

$$\bar{\varphi} = |\varphi| \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \delta \end{vmatrix}$$

$$\dot{\varphi} = \bar{\omega} + \frac{1}{2} (\bar{\varphi} \times \bar{\omega}) + \frac{1}{|\varphi|^2} \left( 1 - \frac{|\varphi| \sin |\varphi|}{2(1 - \cos |\varphi|)} \right) \cdot \bar{\varphi} \times (\bar{\varphi} \times \bar{\omega})$$

Для мал. углов поворота:

$$\dot{\varphi} = \bar{\omega} + \frac{1}{2} (\bar{\varphi} \times \bar{\omega}) + \frac{1}{2} (\bar{\varphi} \times (\bar{\varphi} \times \bar{\omega}))$$

→ похожие на  
разложения  
в ряд

• В блоке ⑤ осущ. аппроксим. полиномом

Вектор конеч. поворота опред. 4 пар-ра ориентац, так назыв. пар-ры Родрига-Гамильтона.

Введем 4 пар-ра скаляр. обр., что один из них  $q_0$  от завис. только от велич. поск. угла поворота, а 3 других  $q_1, q_2, q_3$  от поск. угла повор. и проск. вращ. конеч. поворота.

Усл. выбора:  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$

$$q_0 = \cos \frac{\chi}{2}$$

$$q_1 = \sin \frac{\chi}{2} \cos \alpha$$

$$q_2 = \sin \frac{\chi}{2} \cos \beta$$

$$q_3 = \sin \frac{\chi}{2} \cos \delta$$

Кватернион:  $Q = q_0 + \bar{q}$

вещ. часть

мним. часть, содержит  $q_1, q_2, q_3$

$$Q = \cos \frac{\varphi}{2} + e \sin \frac{\varphi}{2}$$

## Основные кинематические соотношения Алгебра кватернионов

1.  $|Q| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$  — норма кватерн.

2.  $Q+S = (q_0+s_0) + (q_1+s_1)i + (q_2+s_2)j + (q_3+s_3)k$

3.  $Q-S = (q_0-s_0) + (q_1-s_1)i + (q_2-s_2)j + (q_3-s_3)k$

4.  $Q \circ S = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(s_0 + s_1i + s_2j + s_3k) \ominus$

$i^2 = -1$

$i \circ j = k$   
 $j \circ i = -k$

$\ominus (q_0s_0 - q_1s_1 - q_2s_2 - q_3s_3) + (q_0s_1 + q_1s_0 + q_2s_3 - q_3s_2)i +$   
 $+ (q_0s_2 + q_2s_0 + q_3s_1 - q_1s_3)j + (q_0s_3 + q_1s_2 - q_2s_1 + q_3s_0)k$

5.  $\tilde{Q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$  — инверсия.

$I \xrightarrow{Q} E$  → перевести базис I в базис E с помощью кватерниона.

$E = Q \circ I \circ \tilde{Q}, I = \tilde{Q} \circ E \circ Q$

$R_I \xrightarrow{Q} R_E$

• Братинский, Шингелевский  
"Основы алгебры кватернионов"

$R_E = \tilde{Q} \circ R_I \circ Q, R_I = Q \circ R_E \circ \tilde{Q}$

Кватернионный аналог уравнения Эйлера.

$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q \circ \omega$

$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$

$$\rightarrow \begin{matrix} \dot{Q} \\ \omega \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{matrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2\dot{q}_0 = -\omega_x q_1 - \omega_y q_2 - \omega_z q_3 \\ 2\dot{q}_1 = \omega_x q_0 + \omega_z q_2 - \omega_y q_3 \\ 2\dot{q}_2 = \omega_y q_0 - \omega_z q_1 + \omega_x q_3 \\ 2\dot{q}_3 = \omega_z q_1 + \omega_y q_2 - \omega_x q_3 \end{cases}$$

список → блок ③

→ блок ④

напис. упр. с. с англ. об.

$$\begin{cases} 2\dot{q}_0 = -\omega_x q_1 - \omega_y q_2 - \omega_z q_3 \\ 2\dot{q}_1 = \omega_x q_0 + \omega_z q_2 - \omega_y q_3 \\ 2\dot{q}_2 = \omega_y q_0 - \omega_z q_1 + \omega_x q_3 \\ 2\dot{q}_3 = \omega_z q_0 + \omega_y q_1 - \omega_x q_2 \end{cases}$$

• Знае пар-ри ек-ти  
объекта, напу.  $q_i$

свучсб

→ Блок ⑥: *physics body* → inertial <sup>(navig)</sup>  
 → Блок ⑦: *robot body* → navigating → упр.  
 → коррени. квадериона  
 за керени (коррени.)

калунг.  
ум-сн.  
с аме-сб